بناء النماذج الرياضية باستخدامMicrosoft Excel

الأستاذ الدكتور حامد سعد نور والمدرس المساعد سهاد علي شهيد

الجامعة المستنصرية / كلية الإدارة والاقتصاد/ قسم الإحصاء

المبحث الأول

١-١ المقدمة

يتناول هذا البحث الاساسيات الاولية لموضوع بناء النماذج Model Design . والنماذج التي نعنيها هنا هي نماذج لنظم حركية عشوائية Dynamic Stochastic System والتي هي نادرة جداً. تعتبر النمذجة فناً وعلماً وهي تعتمد على الابداع والخيال والمهارات الفردية مثلها مثل اي عمل خلاّق. وقد تم عرض النمذجة باستخدام Microsoft Excel وذلك للانتشار الكبير وجودته العالية وسهولة استخدامه .

لقد تطرقنا في هذا البحث الى استعرض النماذج الاولية Prototype Models التي تعد المكونات الاولية لتصميم وبناء الكثير من النماذج المعقدة ، كما تم استعراض الادوات الرياضية المهمة في تصميم النماذج مثل المعادلات التفاضلية Differential Equations ومعادلات الفروق Difference Equations وحساب المصفوفات Matrix Algebra and Calculus وتمثيل فضاء الحالة State Space Representation .

Introduction :

This research deals with the basics to the subject of preliminary design models . And models that define Here are examples of Dynamic Stochastic System, which is very rare. Modeling is an art and a note depends on the creativity, imagination and individual skills, like any creative work. Has been modeling using Microsoft Excel in order to spread the large and high quality and ease of use

We have dealt in this research reviewed the Prototype Models, which are components of the initial design and build a lot of complex models, were also reviewed the tools of mathmatics in the design of models such as Differential Equations and Difference Equations and calculation of matrices Matrix Algebra and Calculus and the State Space Representation

١-٢ هدف البحث

هدف البحث هو اعطاء صورة واضحة عن طبيعة العلاقات التي تبنى على اساسها النموذج اذ تكون هذه العلاقات متمثلة بمعادلات رياضية وتختلف باختلاف طبيعة المشكلة المراد تكوين نموذج عنها وكيفية صياغتها (المعادلات) ووضعها ببرامج جاهزة لتسهيل العمل وسرعة الانجاز. ان استخدام البرنامج EXCEL في بناء النموذج اعطى صورة واضحة للباحث عن كيفية الاستخدام للبرنامج مما يؤدي الى استخدام نماذج معقدة وتحويلها الى صيغة اكثر بساطة من خلال المعادلات الرياضية وتطبيقها وفق البرنامج الجاهز.

١-٣ مشكلة البحث

العالم الذي نعيش فيه معقد جداً بشكل يستعصي على الانسان فهم المشاكل الحقيقية بشكل كامل او حتى جزئي ولهذا يلجأ الانسان الى التقريب والتبسيط لشرح طبيعة هذه المشاكل لكي يحاول حلها . ان التركيز على فهم تراكيب وتصرفات ناظم من خلال استخدام تركيب اولي ومن ثم تبنى التنبؤات عن تصرف الناظم على اساس تلك التراكيب الاولية كما ان حركية النظام تتعلق بالنظر الى النظام من ناحية خواصه التركيبية المتغيرة مع الزمن والتي تتطلب بناء نماذج لاستكشاف النظام تحت الدراسة .

١-٤ اساسيات النمذجة : الغرض ودرجة الوضوح والموارد المتاحة

يعرف النموذج على انه : التمثيل الحقيقي لظاهرة ما. اذ ان هناك شيء جوهري لتقييم النموذج الاوهو الغرض Purpose : فيصبح تعريف النموذج على انه : تمثيل ذا غرض معين لحقيقة ما، على سبيل المثال فمخطط الشوارع هو تمثيل للحقيقة التي سيبدو بها شوارع مدينة ما ولغرض الاستدلال على شوارعها .

الشيء الثاني المهم بالنسبة لمفهوم النموذج هو درجة الوضوح Resolution ، فمثلاً من الصعب تحديد تفاصيل الاشياء من صورة اخذت بآلة تصوير لم يعدل بعدّها البؤري ومن مسافة بعيدة ولكن ستكون التفاصيل واضحة جداً ومحددة اذا اخذت بآلة تصوير من نوع جيد ومن بعد مناسب، فالنماذج ايضاً لها درجة وضوح وهذا يتعين بمقدار التفاصيل الضرورية والهامة التي تدخل في بناء النموذج.

الشي الاخير والجوهري في بناء النموذج هي الموارد المتاحة Resources feasible ، وتشمل المواد المعطاة والزمن المتاح والخبرة المتوفرة او الممكن اكتسابها ضمن الزمن المتاح والدعم البشري والمالي، فعلى قدر الموارد والامكانيات نستطيع ان نبني نموذج للغرض المطلوب وبالوضوح المناسب.

ومن المبادئ المهمة في بناء النماذج هو مبدأ التصميم من الاسفل للاعلى Bottom up design وهو البدء بنموذج بسيط قليل الوضوح ثم زيادة التفاصيل المناسبة بقدر ماتسمح الموارد وحتى يتحقق الغرض من النموذج.

ان عملية تحويل العالم الحقيقي الى عالم النموذج هي في الحقيقة اهم واصعب خطوة في بناء النماذج والتي نقوم بها مستهدين بمبدأ موس اوكهام Occam's Razor وهو مبدأ فلسفي علمي ينص على: لتبسيط الاشياء (المشاكل) استبعد كل التفاصيل غير الضرورية او على الاقل ابدأ بأهم التفاصيل التي تحدد هذه الشيء (المشكلة) ، هذا المبدأ بنى عليه مبدأ او قاعدة الشح Parsimony Principle في البحث العلمي والذي ينص : اذا كان هناك اكثر من نموذج واحد يعطي تقريباً نفس النتائج فالنموذج الذي يحوي اقل عدد من المتغيرات والمعالم هو النموذج الافضل فنحن نقطع العالم الحقيقي الى حجم يمكن التعامل معه كما لو قطع بأبسط حالة قاطعة.

١-٥ بعض التعاريف الاساسية في النموذج

- ✓ النظام **System**: مجموعة من الاشياء تتفاعل وتعتمد على بعضها البعض.
- ✓ نشاط Activity : اي عملية تسبب تغيير في حالة النظام.
- ✓ متغيرات الحالة او حالة النظام State Variable or State of the System :

وهي متغيرات تمثل كل شي وتصف الانشطة في النظام عند لحظة معينة، ويدرس تطور النظام بتتبع التغيرات في حالته فهو اي شيء يتغير مع الزمن (ديناميكي،متحرك) بزيادة او نقصان ويسمى ايضاً المستوى Level .

- ✓ بيئة النظام : يتأثر النظام بالتغيرات التي تحدث خارجه كما انه يؤثر على المحيط من حوله مثل هذه التغيرات تؤثر على بيئة النظام. فمن المهم جداً عند نمذجة النظام ان نميز بين الحدود بين النظام وبيئته وهذا يتحدد بمعرفة الاهداف من وراء دراسة هذا النظام.
- ✓ نمذجة النظام **System Modeling** : لدراسة نظام ما يجب ان نبني نموذج **Model** لوصف هذا النظام لغرض اجراء التجارب للاجابة على الاسئلة والافتراضات التي لايمكن اجراءها على النظام مباشرة وذلك حتى لايضطرب النظام الاصلي ويحدث ارباك في عمله يؤدي الى تغيير النظام وفقدان لخواصه الاصلية .

١-٦ انواع النماذج

- فيزيائية (مادية) Physical Models : وهي التي تبنى بمواد حسية مثل بناء نموذج لطائرة في مرحلة التصميم وذلك لاختبار هيكلها تحت ظروف معينة.

- رياضية (تحليلية او تجريدية) Mathematical Models: والتي تستخدم لبنائها علاقات (توزيعات احتمالية ،دوال، جداول ، رسومات ، الخ..)

المبحث الثاني

الادوات الرياضية المهمة في بناء النموذج

٢ - ١ المعادلات التفاضلية_Differential Equation

المعادلات التفاضلية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من مشتقات لدالة لمتغير جبري قابلة للتفاضل فمثلاً لو كان $x = f(t)$ فان كل من المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية للمتغير $x = f(t)$:

$$\frac{dx}{dt} + tx + 3 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 14x - 10 = 0$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x + 2 = 0$$

وتتميز المعادلات التفاضلية بدرجتها Degree وخطيتها Linearity وفيما يلي المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى والثانية والخطية وطرق حلها.

أولاً : المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى الخطية :

وتكون بالشكل التالي : $f(t,x)\frac{dx}{dt} + h(t,x) = 0$

حيث ان $f(t,x)$ و $h(t,x)$ دوال خطية في t و x .

- طريقة حل معادلات تفاضلية تحوي متغيرات قابلة للفصل :

اذا كانت كل من $f(t,x)$ و $h(t,x)$ يمكن وضعها بالشكل :

$$f(t,x) = p(t)\,q(x)$$
$$h(t,x) = r(t)\,s(x)$$

اي يكون شكل المعادلة التفاضلية هو

$$p(t)q(x)\frac{dx}{dt}+r(t)s(x)=0$$

وعلى شرط ان $s(x)\neq 0$ لجميع قيم x في المجال المعطى و $p(t)\neq 0$ لجميع قيم t في المجال المعطى، بقسمة طرفي المعادلة على $s(x)\,p(t)\neq 0$ نستطيع فصل المتغيرات كالاتي

$$\frac{q(x)}{s(x)}dx+\frac{r(t)}{p(t)}dt=0$$

ونحصل على الحل بالتكامل المباشر كالاتي:

$$\int\frac{q(x)}{s(x)}dx+\int\frac{r(t)}{p(t)}dt=C$$

حيث C ثابت اختياري .

ثانياً : المعادلات التفاضلية من الدرجات العليا Higher Order Differential Equation:

- **المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة Linear Equation with Constant Coefficient**

١- الحالة المتجانسة Homogeneous Case :

وهي على الشكل التالي :

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+.......+a_nx=f(t)$$

سوف نستخدم ترميز لتبسيط شكل المعادلة وهو $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ و $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ وبشكل عام $x^{(n)}=\dfrac{d^nx}{dt^n}$ فتصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+.....+a_nx=f(t)$$

ويطلق عليها معادلات تفاضلية بمعاملات خطية ثابتة ، اذ ان $a_1, a_2, \ldots.., a_n$ ثوابت (غالباً ما تكون اعداد حقيقية) وسوف نوضح اولاً الشكل المتجانس لهذه المعادلات والتي يكون فيها $f(t) = 0$ اي المعادلة على الشكل

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n x = 0$$

لحل هذه المعادلة نجرب الحل $x = Ce^{\lambda t}$ حيث $e^{\lambda t} \neq 0$ ولثابت اختياري C ، وبالتعويض بالمعادلة السابقة ينتج

$$\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_n\right) e^{\lambda t} = 0$$

اذ ان $p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots.. + a_n$ وتسمى كثيرة الحدود المميزة Characteristic Polynomial قيم λ المسموح بها هي حلول (او جذور او اصفار) .المعادلة $p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots.. + a_n = 0$ والتي تسمى المعادلة المساعدة Auxiliary Equation حيث ان $p(\lambda)$ هي كثيرة الحدود من الدرجة n فان $p(\lambda) = 0$ لها n من الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \ldots.., \lambda_n$ اذا كانت $a_1, a_2, \ldots.., a_n$ حقيقية فان هذه الجذور اما ان تكون حقيقية او ازواج من الاعداد المركبة . كل من الصيغ $x_i = C_i e^{\lambda_i t},\ i = 1,2,\ldots\ldots,n$ هو حل للمعادلة التفاضلية بثابت اختياري Ci ويكون

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + C_n e^{\lambda_n t}$$

ايضاً حلاً ويسمى الدالة المكملة Complementary Function وفي حالة المعادلات المتجانسة يكون الحل العام هو الدالة المكملة .

مثال على ذلك لحل المعادلة التفاضلية التالية

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

المعادلة المساعدة هي

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

وجذور $p(\lambda) = 0$ هي $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ ويكون الحل العام

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

٢ - الحالة غير المتجانسة Inhomogeneous Case

الحل العام للمعادلات غير المتجانسة

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = f(t)$$

يكون بالشكل

$$x = x_{CF} + x_{PS}$$

اذ ان x_{CF} يسمى الدالة المكملة Complementary Function و x_{PS} يسمى الحل الخاص Particular Solution .

٢-٢ معادلات الفروق Difference Equations

معادلات الفروق هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من فروقات لمتغير جبري يأخذ قيم منفصلة فمثلاً لو كان $x_k = x(t_n),\ k = 0,1,2,.....,n$ فان التالي معادلات فروق للمتغير $x_k, k = 0,1,2,.....,n$

$$x_k - x_{k-1} - x_{k-2} = 0$$
$$x_k + 2x_{k-1} = 5$$
$$x_k - 3 = 0$$
$$x_k - 3k - 7 = 0$$

القاعدة العامة

$$\Delta^m x_k = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x_{k-j}$$

معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى :

وتكون بالشكل التالي

$$a_{0,k}x_k + a_{1,k}x_{k-1} = c_k, \qquad k = 1,2,......,n$$

وتكتب ايضاً بالشكل

$$x_k = -\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}}x_{k-1} + \frac{c_k}{a_{0,k}}, \qquad k = 1,2,......,n$$

$$x_k = Ax_{k-1} + C, \qquad k = 1,2,......,n$$

حيث ان $A \neq 0$ **وهي ثابتة .**

لحل المعادلة $x_k = Ax_{k-1} + C, \quad k = 1,2,......,n$ **على فرض ان** x_0 **معطاة وبوضع k=1 نجد ان**

$$x_1 = Ax_0 + C$$

ولقيمة k=2

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + C \\ &= A(Ax_0 + C) + C \\ &= A^2x_0 + (1+A)C \end{aligned}$$

ولقيمة k=3

$$\begin{aligned} x_3 &= Ax_2 + C \\ &= A(A^2x_0 + (A+1)C) + C \\ &= A^3x_0 + (1+A+A^2)C \end{aligned}$$

وبشكل عام

$$x_k = A^k x_0 + C(1 + A + A^2 + ... + A^{k-1}), \qquad k = 1,2,.....$$

اذ ان

$$1+A+A^2+.....+A^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{1-A^k}{1-A} & , \quad if \quad A\neq 1\\ k & , \quad if \quad A=1\end{cases}$$

وبذلك يصبح الحل

$$x_k=\begin{cases}A^k x_0+C\dfrac{1-A^k}{1-A}, & if \quad A\neq 1\\ x_0+Ck \quad , & if \quad A=1\end{cases}$$

مثال على ذلك اذا كانت $k=1,2,....$ $x_k=2x_{k-1}+1$, **ولقيمة اولية** $x_0=5$ **نجد ان**

$$x_k=5(2^k)+1\left(\frac{1-2^k}{1-2}\right), \qquad k=0,1,2,........$$

$$=6(2^k)-1, \quad k=0,1,2,........$$

وبأعطاء k القيم $0,1,2,......$ **نجد ان الحل يكون المتتابعة** $5,11,23,47,.....$

٢-٣ حل المعادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى باستخدام Excel:

لحل المعادلات الفروق تكرارياً يمكن القيام بواسطة Excel كالاتي :

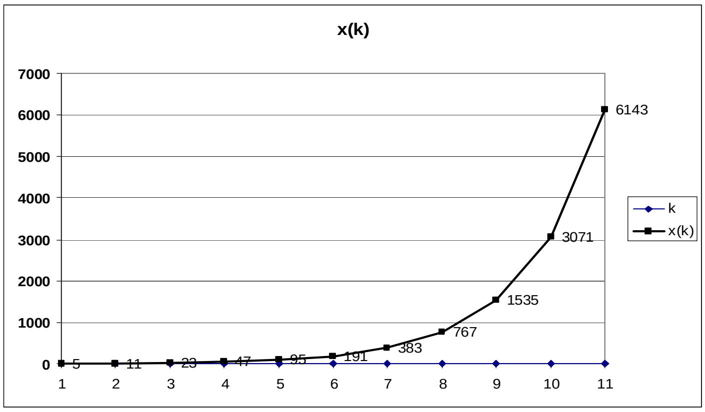
ادخل السطر الاولى وحتى الثالث ثم ننسخ السطر الثالث حتى المدة المناسبة وكما في الشكل :

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	=2*B2+1
4	2	=2*B3+1
5	3	=2*B4+1
6	4	=2*B5+1
7	5	=2*B6+1
8	6	=2*B7+1
9	7	=2*B8+1
10	8	=2*B9+1
11	9	=2*B10+1
12	10	=2*B11+1

والنتيجة تكون :

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	11
4	2	23
5	3	47
6	4	95
7	5	191
8	6	383
9	7	767
10	8	1535
11	9	3071
12	10	6143

ولها الشكل التالي :



الشكل(١) يمثل توزيع المعادلة بشكل اسي متزايد

مثال اخر اذا كانت $2x_k - x_{k-1} = 4, \quad k = 1,2,......$ **ولقيمة اولية** $x_0 = 3$ **نجد ان**

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + 2 \quad , k = 1,2,.....$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k 3 + 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad k = 0,1,2,.....$$

$$= 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad , \quad k = 0,1,2,......$$

وبأعطاء k القيم ......0,1,2 نجد ان الحل يكون المتتابعة ...... $3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 3\frac{7}{8}, 3\frac{15}{16}, ...$

الحل باستخدام Excel يكون بالشكل التالي :

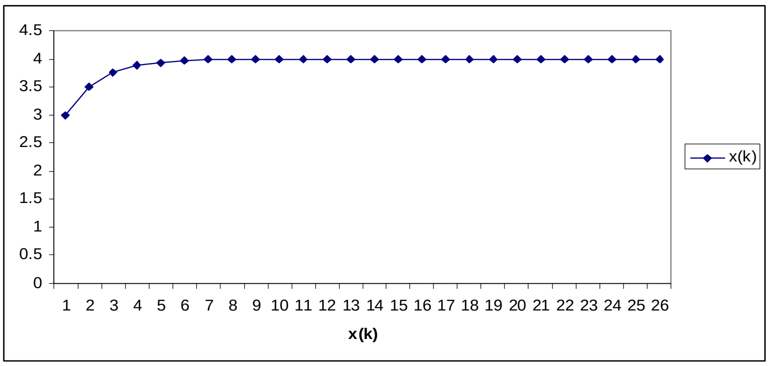
ادخل الاسطر من الاول حتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب كما في الشكل :

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	=0.5*B2+2

والنتيجة تكون كما في الشكل :

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	3.5
4	2	3.75
5	3	3.875
6	4	3.9375
7	5	3.96875
8	6	3.984375
9	7	3.992188
10	8	3.996094
11	9	3.998047
12	10	3.999023
13	11	3.999512
14	12	3.999756
15	13	3.999878
16	14	3.999939
17	15	3.999969
18	16	3.999985
19	17	3.999992
20	18	3.999996
21	19	3.999998
22	20	3.999999
23	21	4
24	22	4
25	23	4
26	24	4
27	25	4

ولها الشكل التالي :



الشكل (٢)

سوف نتطرق الى تأثير القيمة الاولية على تصرف المتتابعة الناتجة من الحل بالمثال الاتي :

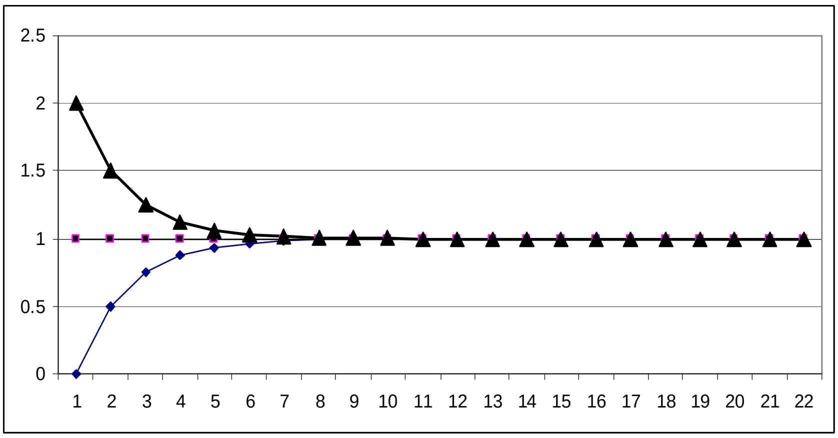
لحل المعادلة الفروقية التالية $x_k = \frac{1}{2} x_{k-1} + \frac{1}{2} \;\;,\;\; k = 1,2,....$

والقيم الاولية هي $x_0 = 0,1,2$ الحل بواسطة **Excel** كالاتي

	A	B	C	D
1	k	x(k)	x(k)	x(k)
2	0	0	1	2
3	1	0.5	1	1.5
4	2	0.75	1	1.25
5	3	0.875	1	1.125
6	4	0.9375	1	1.0625
7	5	0.96875	1	1.03125
8	6	0.984375	1	1.015625
9	7	0.992188	1	1.007813
10	8	0.996094	1	1.003906
11	9	0.998047	1	1.001953
12	10	0.999023	1	1.000977
13	11	0.999512	1	1.000488
14	12	0.999756	1	1.000244
15	13	0.999878	1	1.000122
16	14	0.999939	1	1.000061
17	15	0.999969	1	1.000031
18	16	0.999985	1	1.000015
19	17	0.999992	1	1.000008
20	18	0.999996	1	1.000004
21	19	0.999998	1	1.000002
22	20	0.999999	1	1.000001
23	21	1	1	1

وتأخذ الشكل الاتي

6+



55

الشكل (٣) يوضح ان حل المعادلة مستقر ومتقارب

حيث نلاحظ ان هناك حل مستقر في كل الحالات اذ تتقارب متتابعة الحل الى ١ .

٢-٤ بعض النماذج الاساسية

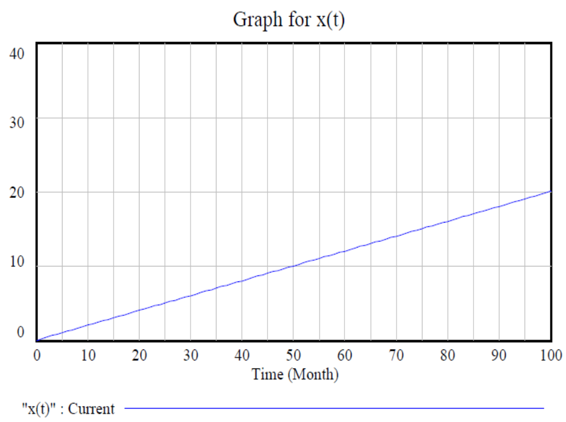
سوف نبني بعض النماذج الاساسية التي تعتبر تركيبات اولية لبناء نماذج اكثر تعقيداً واقرب الى العالم الحقيقي :

١- نموذج النمو (الانحلال) الخطي :

وهو ابسط تركيب لنظام يزداد او يتناقص بمعدل ثابت، فلو فرضنا ان المستوى او متغير الحالة Variable State عن الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فان معدل الزيادة $(a > 0)$ او النقص $(a < 0)$ يعطى بالعلاقة

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = a$$

ولـ $(a > 0)$ تعطى بالشكل :

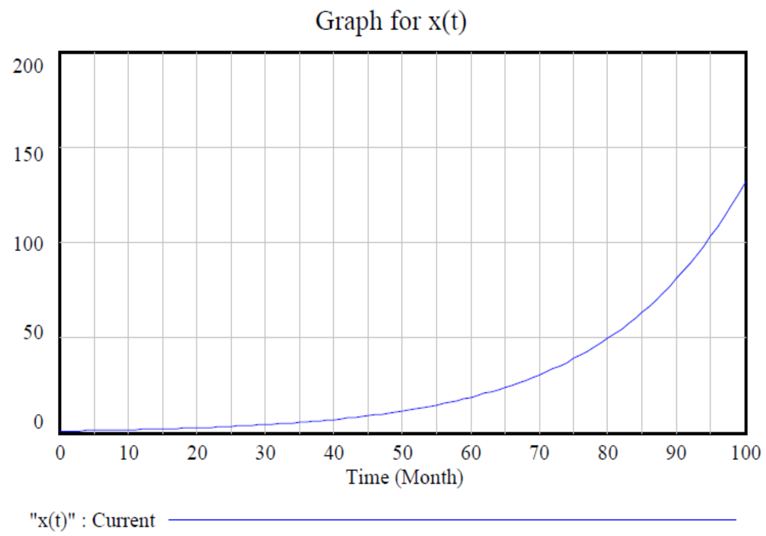


٢- نموذج النمو (الانحلال) الاسي:

هذا النموذج يتعلق بمستوى او فضاء حالة يتزايد او يتناقص بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة، فأذا فرضنا ان المستوى او فضاء الحالة عن الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فان معدل الزيادة $(a>0)$ او النقص $(a<0)$ يعطى بالعلاقة

$$\dot{x}(t)=ax(t)$$

ولـ $(a>0)$ تعطى بالشكل



٣- نموذج النمو والانحلال الخطي :

ويمثل فضاء الحالة يتزايد بمعدل ثابت $(a>0)$ وفي نفس الوقت يتناقص بمعدل ثابت اخر $(b<0)$ ويمثل كالاتي

$$\dot{x}(t)=a-b$$

٤- نموذج النمو والانحلال الاسي :

هذا النموذج يتعلق بمستوى او فضاء حالة يتزايد ويتناقص بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة ، فلو افترضنا ان المستوى او فضاء الحالة عند الزمن t يمثل بالمقدار $x(t)$ فان معدل الزيادة $(a>0)$ او النقص $(a<0)$ يعطى بالعلاقة

$$\dot{x}(t)=(a-b)x(t)$$

٥- النموذج التربيعي :

هذا النموذج يجمع عمليتين خطيتين معاً لكي يعطي نتيجة مركبة ، فمثلاً اذا كان $x(t)$ يمثل موقع مركبة فان $\dot{x}(t)$ يمثل سرعتها الافقية الثابتة واذا رمزنا للسرعة بالرمز $v(t)$ اذ ان $(v(t) = \dot{x}(t))$ فان التعجيل يكون $\dfrac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ وتكتب معادلات الحركة بشكل المعادلة

$$\ddot{x}(t) = a$$

اذ ان $(a > 0)$ تعجيل زيادة و $(a < 0)$ تعجيل نقص.

٦- نموذج الولادة والموت **Birth–Death Model**

ويوصف بالمعادلة التفاضلية

$$\dot{x} = (b-d)x$$

او الفروقية

$$x_t = x_{t-1} + (b-d)x_{t-1}$$

٢-٥ تعيين معالم النموذج الحركي Determining Dynamic Model Parameters

من الضروري تعيين قيم المعالم لكي نستخدم النموذج سوف نعطي مثال لنموذج المنحنى اللوجستي حيث يمثل نموذج لحركية تسويق منتج دائم . النموذج يوضح نمو السوق الكلي لمنتج جديد طور بحيث يتم شراءه مرة واحدة لكل زبون. لذلك معدل شراء المنتج يعتمد على :

١- عدد الزبائن الذين اشتروا المنتج.

٢- عدد الزبائن الباقين الذي يتوقع ان يشتروا المنتج.

٣- درجة اقتناع الزبائن المتوقعين برضاء الزبائن الذين اشتروا المنتج.

اذا افترضنا ان عند الزمن t يوجد $n(t)$ من المشترين لكل واحد منهم حوّل $c\Delta t$ من المتوقعين الى مشترين في الفترة الزمنية Δt فعند الزمن $t + \Delta t$ عدد المشترين يصبح

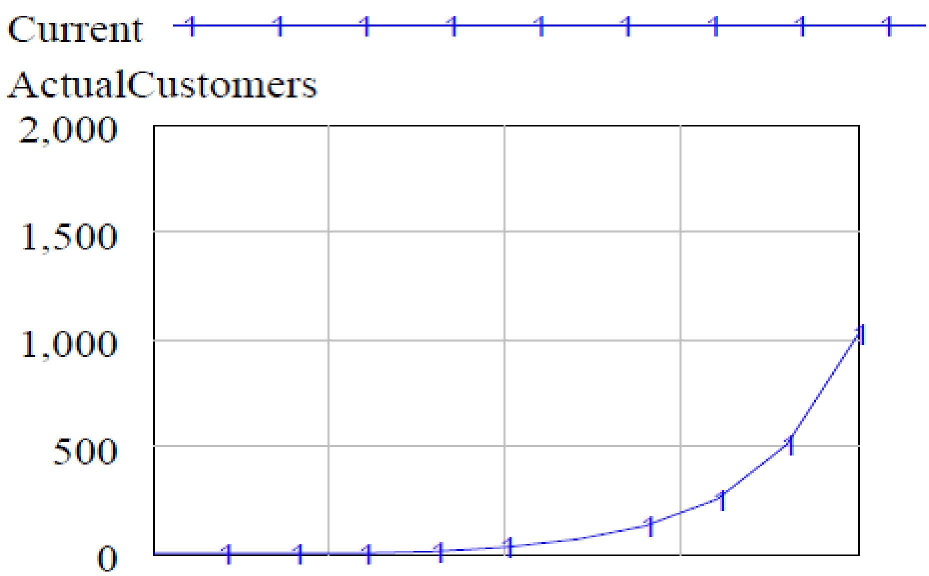
$$n(t+\Delta t) = n(t) + n(t)c\Delta t$$

حيث n_0 هو عدد المشترين عند الزمن t=0

لحل المعادلة السابقة سوف نضعها على شكل معادلة فروقية:

$$n(t+\Delta t)-n(t)=n(t)c\Delta t$$
$$for\ \Delta t=1(one\,time\,unit)$$
$$n_{t+1}=n_t+n_t c$$
$$n_{t+1}=(1+c)n_t$$
$$when\ t=0,\ n_t=n_0$$
$$n_1=(1+c)n_0$$
$$n_2=(1+c)n_1=(1+c)(1+c)n_0=(1+c)^2 n_0$$
$$n_3=(1+c)n_2=(1+c)^3 n_0$$
$$or$$
$$n_t=(1+c)^t n_0\quad t\geq 0$$

لو رسمنا الدالة الاخيرة نلاحظ انها تسلك سلوك النمو الاسي كما يوضح الشكل الاتي:



الشكل (٤) يوضح النمو الاسي لعدد الزبائن

سوف نحدد النموذج على اساس ان عدد المشترين محدود لان في الحقيقة النمو الاسي لايمكن ان يستمر للابد ذلك لان المتوقعين سيتحولون كلهم الى مشترين اذا كان عدد محدود.

على فرض ان العدد الكلي للمتوقعين هو M=100 فيكون عدد الزبائن المتبقين عند الزمن t هو M−n(t) حيث n(t) هو عدد المشترين عند الزمن t لنفرض ان c هو معدل التحويل لكل مشتري عندما يوجد M متوقعين. وعلى افتراض ان معدل التحويل يتناسب خطياً مع العدد الكلي للمتوقعين المتبقين عند اي لحظة زمنية، على سبيل المثال لو كان تبقى نصف المتوقعين فان معدل التحويل لكل مشتري هو c/2 واذا تبقى ربع المتوقعين فان معدل التحويل لكل مشتري هو c/4 وهكذا.

تحت هذه الفرضيات فان عدد المتوقعين المتحولين بمشترى واحد في الفترة الزمنية Δt هو

$$\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

ويكون عدد المتوقعين المحولين بكل n(t) مشتري هو

$$n(t)\times\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

عند الزمن خطأ! يتعذر إنشاء كائنات من تحرير رموز الحقول. عدد المشترين يصبح

$$n(t+\Delta t)=n(t)+n(t)\times\{[M-n(t)]/M\}\times c\Delta t$$

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{\Delta t}=c\times\{[M-n(t)]/M\}\times n(t)$$

اذ ان n_0 هو عدد المشترين عند الزمن t=0 ، حل المعادلة السابقة هو

$$n(t)=\frac{M}{1+[(M-n_0)/n_0]e^{-ct}} \ , t\geq 0$$

المعادلة الاخيرة لمنحنى يسمى المنحنى اللوجستي Logistic curve

حيث ان

n_0 : عدد المشترين عند الزمن t=0

c: معدل التحويل من شخص متوقع ان يشتري الى مشتري

M :العدد الكلي للمشترين المتوقعين

ولغرض تعيين معالم النموذج سوف نستعرض طريقة لتحديد المعالم على وفق المثال التالي.

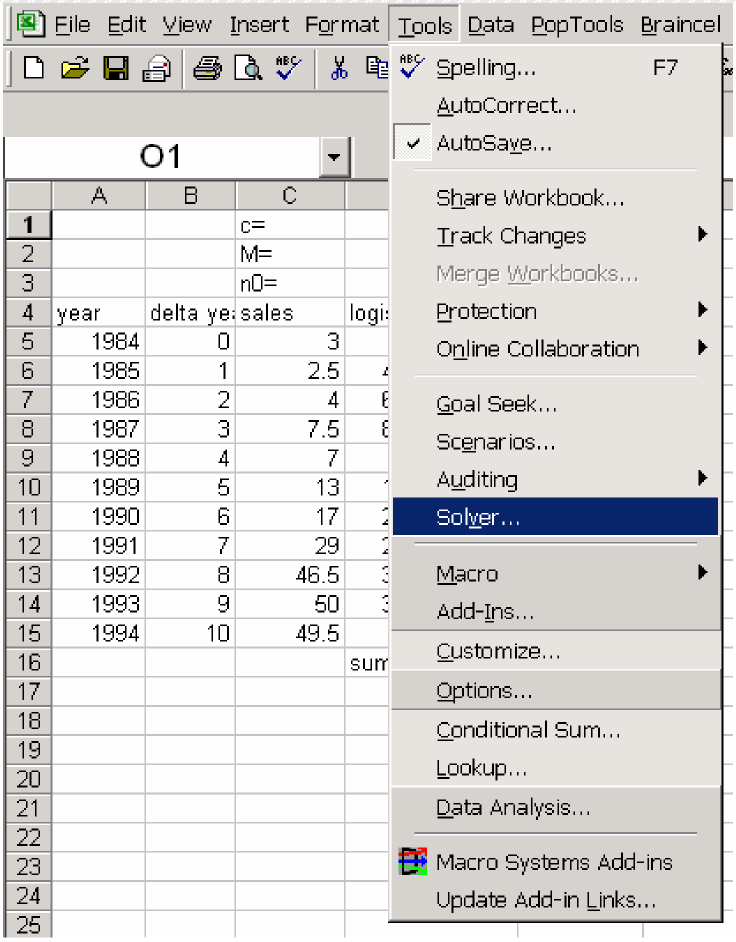
الجدول التالي يوضح نسبة المبيعات لمنتج معين من سنة ١٩٩٠-٢٠٠٠ (المبيعات بالاف) :

Year	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
Sales	3.0	2.5	4.0	7.5	7.0	13.0	17.0	29.0	46.5	50.0	49.5

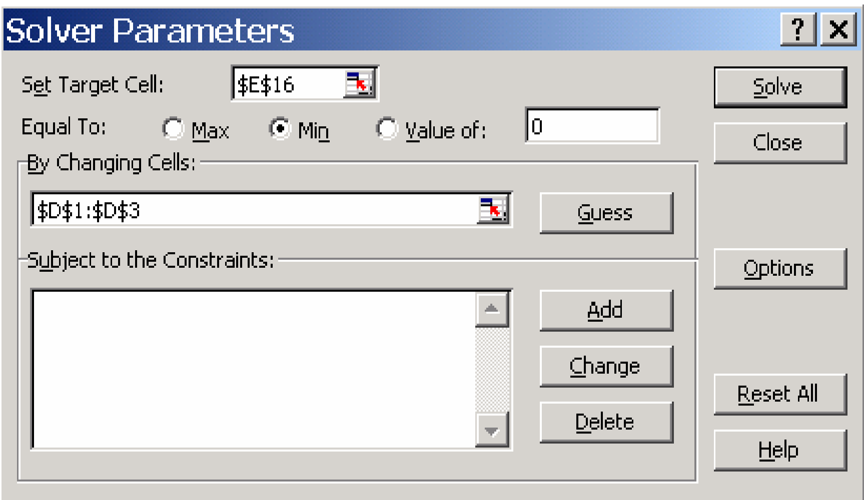
لتعيين معالم النموذج باستخدام Excel ندخل التالي في صفحة جديدة ونحدد القيم الاولية لكل من (c=0.4,M=55,n0=3)

	A	B	C	D	E
1			c=	0.4	
2			M=	55	
3			n0=	3	
4	year	delta year	sales	logistic	s error
5	1984	0	3	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B5))	=(D5-C5)^2
6	1985	1	2.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B6))	=(D6-C6)^2
7	1986	2	4	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B7))	=(D7-C7)^2
8	1987	3	7.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B8))	=(D8-C8)^2
9	1988	4	7	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B9))	=(D9-C9)^2
10	1989	5	13	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B10))	=(D10-C10)^2
11	1990	6	17	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B11))	=(D11-C11)^2
12	1991	7	29	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B12))	=(D12-C12)^2
13	1992	8	46.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B13))	=(D13-C13)^2
14	1993	9	50	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B14))	=(D14-C14)^2
15	1994	10	49.5	=$D$2/(1+(($D$2-$D$3)/$D$3)*EXP(-$D$1*B15))	=(D15-C15)^2
16				sum=	=SUM(E5:E15)
17					

من سطر الادوات نختار التالي

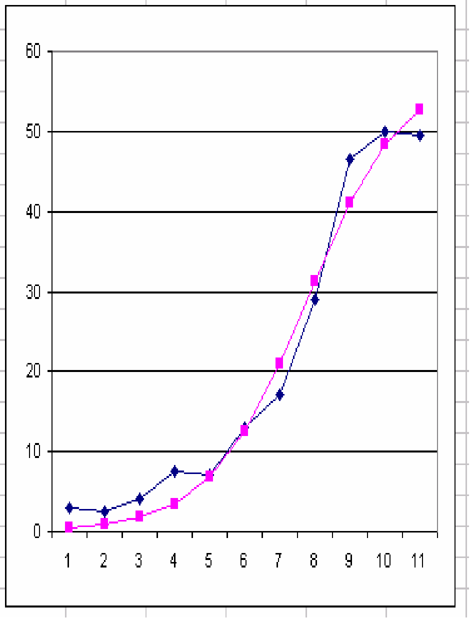


عندها تظهر نافذة Solver



لاحظ ان Set Target Cell تحوي قيمة مجموع المربعات المراد تصغيره وفي Equal To اخترنا Min للتصغير ويتم تصغير مجموع مربعات بتغيير القيم By Changing Cells التي في الخلايا القيم الاولية $D$1:$D$3 وبالضغط على Solve نحصل على :

	A	B	C	D	E
1			c=	0.728908494	
2			M=	57.76106927	
3			n0=	0.414547642	
4	year	delta ye	sales	logistic	s error
5	1984	0	3	0.414547642	6.6845639
6	1985	1	2.5	0.852715829	2.7135451
7	1986	2	4	1.739966533	5.1077513
8	1987	3	7.5	3.493725224	16.050238
9	1988	4	7	6.800562739	0.0397752
10	1989	5	13	12.51549785	0.2347423
11	1990	6	17	21.04931992	16.396992
12	1991	7	29	31.36790081	5.6069542
13	1992	8	46.5	41.08405122	29.332501
14	1993	9	50	48.30198346	2.8832602
15	1994	10	49.5	52.77507135	10.726092
16				sum=	95.776415
17					
18					
19					
20					



لاحظ ان D1 و D2 و D3 تحوي على القيم النهائية المقدرة للمعالم و E16 تحوي اقل قيمة لمجموع مربعات الاخطاء.

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

١ – ان العالم الحقيقي عبارة عن نموذج كبير معقد مليء بالمشاكل ولحل تلك المشاكل يجب تجزئة هذا النموذج بحسب الاهمية الى نماذج ابسط ليسهل حلها بشكل صحي ومفيد.

٢ – عملية تحويل العالم الحقيقي الى عالم النموذج هي اصعب خطوة في بناء النماذج حيث نستبعد كل التفاصيل غير المهمة.

٣ – من المهم اثناء كتابة نتائج حل النموذج ان نضع الفرضيات التي بنى عليها النموذج.

٤ – التعامل مع المعادلات الرياضية بشكل علمي ومنطقي بحيث تعطي الوصف المناسب لطبيعة النموذج.

التوصيات

١- التعامل مع مشاكل العالم الحقيقي حسب الاتجاه التقليدي يقوم على علاقة السبب والتأثير Cause and Effect البسيطة ويأخذ أجزاء المشكلة بشكل منعزل عن بعضها البعض.

٢- النمذجة Modeling او حركية النظام System Dynamics هي احد ضروريات في التفكير النظامي لانها تحقق من الفرضيات والحلول.

٣- يمكن استخدام البرامج الجاهزة مثل Excel و Vensim او Curve Expert وغيرها من البرامج الإحصائية وبرامج المحاكاة لحل وايجاد معالم النموذج .

المصادر

المصادر العربية

١- بناء النماذج باستخدام Vensim & Excel ،٢٠٠٤، تاليف د. عدنان ماجد عبد الرحمن ، جامعة الملك سعود، قسم الاحصاء وبحوث العمليات.

٢- اساسيات إكسل (في الاحصاء وبحوث العمليات وعلم الادارة)،٢٠٠٣، تاليف د. عدنان ماجد عبد الرحمن ، جامعة الملك سعود، قسم الاحصاء وبحوث العمليات.

المصادر الأجنبية

3- **Mathematics for Dynamic Modeling**,2000, 2nd ed. By: Edwaed Beltrami, Published by: Academic Press.

4- **Mathematical Modeling Techniques** ,2001, By: Rutherford Aris, Published by : Dover Publications, inc.

5- **Introduction to Difference Equations**,1996, By: Samuel Goldberg, Published by: Dover Publications, inc.

6- **Matrix Computations**,1990, By: Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, Published by : North Oxford Academic.