طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة والمعتلة المشتقة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية .

Numerical method for evaluation double integrals its integrands continuous with singularity in partial derivatives by using mid point rule when the numbers of subintervals at the two dimensions are not equal

Prof. Ali Hassan Mohammed

علي حسن محمد

Zainab flaih Hassan

زينب فليح حسن

Sarmad Rahman hussein

سرمد رحمن حسين

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق طريقة لحساب التكاملات الثنائية البعد عدديا عندما تكون مكاملاتها معتلة المشتقات الجزئية أو معتلة في نقطة واحدة او اكثر من منطقة التكامل باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين (الداخلي x والخارجي y) وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) مع تحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك [1]،[5] بالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها عندما تكون اعداد الفترات الجزئية (n) التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x غير مساوية لعدد الفترات الجزئية (m) على البعد الخارجي y ، أي ان $(h_1 \neq h_2)$ حيث ان h_1 تعني المسافات بين الاحداثيات السينية و h_2 هي المسافات بين الاحداثيات الصادية وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز M_i (h_i) اذ يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثنائية حيث اعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبيا (و سنأخذ حالة خاصة عندما $n = 2m$) و هذا يعني ان $(h_1 = \frac{1}{2} h_2)$ لنتمكن من تطبيق تعجيل رومبرك على التكاملات التي نطرحها (ندرسها).

Abstract

The main aim of this search is to derive method to find the values of the double integrals numerically its integrands have singularity at partial derivatives or the integrands are singular in one point or more of region of the integrals by using midpoint rule on the two dimensions (interior x and exterior y) and how to find the general form of the errors (correction terms) with improve the result by using Romberg acceleration[1],[5]by depending on the correction terms that we found it when the number of subintervals (n) that divided integral interval on the interior dimension x not equal to the number of subintervals (m) on the exterior dimension y , that is mean $(h_1 \neq h_2)$ when h_1 means the distances between the ordinates on the x axis and h_2 is the distances between the ordinates on the y axis and we denote to this method by $M_i(h_i)$ and we can depend

on it to calculate the double integrals because it gave high accuracy in results by few subintervals (we will take particular case when $n=2m$, that is mean $(h_1=\frac{1}{2}h_2)$ to able us to use Romberg acceleration on the integrals that we study it) .

الكلمات المفتاحية تعجيل رومبرك ،النقطة الوسطى ، التكامل الثنائي

Key words Romberg acceleration , Midpoint , Double integral

1- المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضاتية معينة بأسلوب فعال. تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنجز. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي.

وتمثل دراسة الخطأ مركزية في التحليل العددي لأن النتائج التي نحصل عليها من تطبيق معظم الطرائق العددية ماهي إلا تقريب للحل الحقيقي المطلوب إيجاده ومن المهم معرفة الخطأ الناتج وكيفية تقديره عبر مجموعة حسابات. ومن المعروف لدىٰ الدارسين لموضوع التحليل العددي أنَّ الحلول العددية للتكاملات تشكل جزءًا مهماً من هٰذا الموضوع ، إذْ إنّ هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون.

إنّ إيجاد القيمة التقريبية (العددية) للتكامل جاءت نتيجة صعوبات كثيرة منها:

1. إذا كان من المحال إيجاد قيمة التكامل تحليليا (Analytically).
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة المضبوطة للتكامل ممكنة ولكن بمشقة لانّ المكامل قد يكون معقداً (Complicated) وتحتاج عملية الحساب إلىٰ زمن طويل لإيجاد قيمة التكامل.
3. قد تكون مسألتنا هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم (أي أنّ الدالة معرّفة في نقاط معدودة (Discrete) في فترة التكامل) كما هي الحال عند تحليل نتائج التجارب.
4. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول (مثل اللوغارتم او معكوس الظل). دافييز رابينوتز [4].

أن عملية إيجاد قيمة للتكامل الثنائي (Double Integral) تشكل مسألة أعقد بكثير من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي لانّ المكامل هنا يعتمد علىٰ متغيرين وأنّ مسالة الاستمرارية والاعتلال في المكامل والاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات رئيسة كبيرة كذلك فإننا نتعامل هنا مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات تكامل كما في حالة التكامل الأحادي.

وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي.

وقد عمل الكثير من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)\ f_2(y)$ ومنهم هانس جار و جاكوبسن [3] عام 1973.عالج محمد [6] في عام 1984 التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المعتلة في المشتقة أو المعتلة وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغارتمي أم كليهما) وذلك باستخدام طرائق مركبة منها رومبرك (كاوس) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعد الخارجي y و كاوس على البعد الداخلي x وأيضا كاوس (رومبرك) التي استخدم فيها كاوس على البعد الخارجي y وتعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعد الداخلي x وكذلك كاوس (كاوس) على البعدين الخارجي y والداخلي x وكذلك طريقة مركبة اسماها رومبرك (رومبرك) وفي عام 2009 قدمتْ ضياء [8] أربع طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطىٰ وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون هي $RM(RS)$ ، $RM(RM)$ ، $RS(RM)$ و $RS(RS)$ ، وقد أعطتْ نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة ، وقد أثبتتْ انّ الطرائق الأربع أعطتْ الدقة نفسها بعدد الفترات الجزئية نفسها بالنسبة للتكاملات الثنائية التي مكاملاتها مستمرة في منطقة التكامل ، أما بالنسبة للتكاملات المعتلة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل فقد أثبتتْ أفضلية الطريقتين $RM(RS)$و $RM(RM)$. وقد أثبتتْ من خلال الأمثلة المختارة للتكاملات المعتلة المشتقة أنّ طريقة $RM(RS)$ هي الأفضل وكذلك التكاملات المعتلة الممكن إلغاء الاعتلال فيها ، أما بالنسبة للتكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها فقد أثبتتْ أنّ طريقة $RM(RM)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب إلىٰ القيم المضبوطة .

التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x وقد اثبت من خلال المقارنة بين الطرائق المركبة أعلاه وعلى أمثلة متعددة بان الطريقة المركبة من كاوس (كاوس) هي الأفضل من بقية الطرائق بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة على البعدين واثبت بنفس الوقت إن الطريقة المركبة رومبرك (كاوس) هي الأفضل في حساب التكاملات التي مكاملاتها معتلة المشتقة أو معتلة والتي يمكن إلغاء اعتلالها على البعد الداخلي x

من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية .

2- حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقة و المعتلة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى

Evalute double Integrals its Integrands have singularity derivatives and singularity by using midpoint rule

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy \qquad ...(1)$$

بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=M_i(h_i)+E_i(h_i) \qquad ...(2)$$

حيث ان $f(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ حيث ان $M_i(h_i)$ تمثل القيمة التقريبية للتكامل باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين (الداخلي x و الخارجي y) وان $E_i(h_i)$ هي سلسلة حدود التصحيح (correction terms)الممكن إضافتها إلى قيم $M_i(h_i)$.

سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي $[a,b]$ لعدد من الفترات الجزئية (n) ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي $[c,d]$ لعدد من الفترات الجزئية (m) ، حيث $h_1=\frac{b-a}{n}$ ، $h_2=\frac{d-c}{m}$ ،(وسنأخذ حالة خاصة فيها عندما $(n=2m$ اي عندما $h_2=2h_1$ ان الصيغة العامة للقاعدة $M_i(h_i)$ هي

$$M_i(h_i)=h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1,y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)$$

$$E_i(h_i)=h_2(b-a)m\left[\frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1}\right)}{\partial x^2}-\frac{7h_1^4}{360}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2}\right)}{\partial x^4}+...\right]+$$

$$+(d-c)(b-a)\left[\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1\right)}{\partial y^2}-\frac{7h_2^4}{360}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2\right)}{\partial y^4}+...\right]$$

$$=(d-c)(b-a)\frac{1}{6}\left(\frac{h_1^2\partial^2 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1}\right)}{\partial x^2}+\frac{h_2^2\partial^2 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1\right)}{\partial y^2}\right)-$$

$$-\frac{7(d-c)(b-a)}{360}\left(\frac{h_1^4\partial^4 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2}\right)}{\partial x^4}+\frac{h_2^4\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2\right)}{\partial y^4}\right)+... \qquad ...(3)$$

حيث

$$\ell=1,2,...,\left(\overline{n_\ell},\overline{\mu_\ell}\right),\left(\hat{n}_\ell,\hat{\mu}_\ell\right)\in[c,d]\times[a,b] .$$

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ كالآتي :

$$E_i(h_i)=I-M_i(h_i)=A_1h_1^2+B_1h_1^4+C_1h_1^6+...+A_1h_2^2+$$
$$B_1h_2^4+C_1h_2^6+... \qquad ...(4)$$

حيث $(i=1,2,...)$ A_i , B_i , C_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط ولا تعتمد على h_1 و h_2.

وبما اننا سنأخذ $h_1=\frac{1}{2}h_2$ لذا يمكن كتابة صيغة الخطأ بالاتي :

$$E_i(h_i)=I-M_i(h_i)=D_1h_1^2+D_2h_1^4+D_3h_1^6+... \qquad ...(5)$$

حيث ان D_1 , D_2 , D_3 ,... ثوابت .

اولا :- التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة المشتقة

لنفرض الان ان دالة التكامل $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل وسنناقش كيفية حساب قيمة التكامل اعلاه بالحالات الاتية

الحالة الأولى :-

<u>ميرهنة:</u> (1)

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ ولكن على الاقل احدى المشتقات الجزئية لها غير معرفة عند النقطة (a,c) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = M_i(h_i)+E_i(h_i)$$

$$M_i(h_i)=h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1, y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)$$

$$E_i(h_i)=\left[\frac{h_1^3h_2}{24}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{24}D_y^2-\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3-\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y-\right.$$
$$\left.-\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3+\ldots\right]f(x_1,y_1)+A_1^*h_1^2+A_2^*h_2^2+A_3^*h_1^4$$
$$+A_4^*h_2^4+\ldots$$

حيث A_i^* ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط لكل $i=1,2,\ldots$.

البرهان :-

بما إن دالة التكامل $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ وليس لها اعتلال ولكن المشتقات الجزئية للدالة غير معرفة عند النقطة (a,c) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a function of two variable ، سستري [5] و[2] موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (a,c) . نستطيع أن نكتب التكامل الثنائي I بالشكل الآتي :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=M_i(h_i)+E_i(h_i)$$

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y)dxdy$$
$$+\sum_{s=1}^{m-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_m}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy \quad \ldots(6)$$

عكار[7] . بالنسبة للتكامل الأول في المنطقة الجزئية $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$ نستعمل متسلسلة تايلر إلى $f(x,y)$ حول النقطة (x_1,y_1) أي أن

$$f(x,y)=[1+(y-y_1)D_y+(x-x_1)D_x+\frac{(y-y_1)^2}{2}D_y^2$$
$$+\frac{(x-x_1)^2}{2}D_x^2+(x-x_1)(y-y_1)D_xD_y$$
$$+\frac{(y-y_1)^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)}{2!}D_x^2D_y+$$
$$+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^2}{2!}D_yD_x^2+\frac{(x-x_1)^4}{4!}D_x^4+\frac{(y-y_1)^4}{4!}D_y^4+\ldots$$
$$]f(x_1,y_1) \quad \ldots(7)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند النقطة (x_1,y_1) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة في أعلاه في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$ نحصل على :

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\left(h_1h_2-\frac{h_1^2h_2}{2}D_x-\frac{h_1h_2^2}{2}D_y+\frac{h_1^3h_2}{6}D_x^2+\right.$$
$$+\frac{h_1^2h_2^2}{4}D_xD_y+\frac{h_1h_2^3}{6}D_y^2-\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3$$
$$-\frac{h_1^3h_2^2}{12}D_x^2D_y-\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2-\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3+$$
$$\left.+\frac{h_1^5h_2}{120}D_x^4+\frac{h_1h_2^5}{120}D_y^4+\ldots\right)f(x_1,y_1) \quad \ldots(8)$$

ومن (7) نحصل على

$$f(x_0+\frac{1}{2}h_1,y_0+\frac{1}{2}h_2)=\left(1-\frac{1}{2}h_1D_x-\frac{1}{2}h_2D_y+\frac{h_1^2}{8}D_x^2+\right.$$
$$\frac{1}{4}h_1h_2D_xD_y+\frac{h_2^2}{8}D_y^2-\frac{h_1^3}{48}D_x^3-\frac{h_1^2h_2}{16}D_x^2D_y-$$
$$\left.\frac{h_1h_2^2}{16}D_xD_y^2-\frac{h_2^3}{48}D_y^3+\frac{h_1^4}{384}D_x^4+\frac{h_2^4}{384}D_y^4+\ldots\right)f(x_1,y_1) \quad \ldots(9)$$

بضرب المعادلة (9) بـ $-h_1h_2$ نحصل على

$$-h_1h_2f(x_0+\frac{1}{2}h_1,y_0+\frac{1}{2}h_2)=\left(-h_1h_2+\frac{1}{2}h_1^2h_2D_x+\frac{1}{2}h_1h_2^2D_y-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}h_1^2h_2^2D_xD_y-\frac{h_1h_2^3}{8}D_y^2+\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3-\frac{h_1^3h_2^2}{16}D_x^2D_y\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 h_1^2 h_2^3}{\partial x^2}\frac{1}{16}D_x D_y^2+\frac{h_1 h_2^4}{48}D_y^3-\frac{h_1^5 h_2}{384}D_x^4-\frac{h_1 h_2^5}{384}D_y^4+\ldots\right)f(x_1,y_1) \quad \ldots(10)$$

، $D_x^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ، $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$ ، $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$

ومن الصيغتين (8) ، (10) نحصل على

$$\ldots، D_y^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\int_{y_1}^{x_1}\int f(x,y)dxdy=h_1h_2f(x_0+\frac{1}{2}h_1,y_0+\frac{1}{2}h_2)+$$

وفي حالة خاصة عندما $h_1=\frac{1}{2}h_2$ نحصل على

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy=M_i(h_i)+h_1^4(a_1D_x^2+a_2D_y^2)+$$

$$\left(\frac{h_1^3h_2}{24}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{24}D_y^2-\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3-\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y-\frac{h_1^2h_2^3}{48}D_xD_y^2\right.$$

$$\left.-\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3+\frac{11h_1^5h_2}{1920}D_x^4+\frac{11h_1h_2^5}{1920}D_y^4+\ldots\right)f(x_1,y_1) \quad \ldots(11)$$

$$+h_1^5(a_3D_x^3+a_4D_y^3+a_5D_x^2D_y+a_6D_xD_y^2)$$

$$+h_1^6(a_7D_x^4+a_8D_y^4)+h_1^7(a_9D_x^5+a_{10}D_y^5)+\ldots]f(x_1,y_1)$$

أما بالنسبة للتكامل الثاني والثالث والرابع فنلاحظ إن دالة التكامل مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة تكاملاتها لذا فان

$$\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}}f(x,y)dxdy=h_1h_2\sum_{r=1}^{n-1}f(x_r+0.5h_1,y_0+0.5h_2)$$

$$+A_1(h_1^2+h_2^2)+A_2(h_1^4+h_2^4)+\ldots \quad \ldots(12)$$

الحالة الثانية :-

$$\sum_{s=1}^{m-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=h_1h_2\sum_{s=1}^{m-1}f(x_0+0.5h_1,y_s+0.5h_2)+$$

$$+B_1(h_1^2+h_2^2)+B_2(h_1^4+h_2^4)+\ldots \quad \ldots(13)$$

$$\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n}f(x,y)dxdy=h_1h_2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}f\left(x_1+\frac{2i-1}{2}h_1,y_1+\frac{2j-1}{2}h_2\right)+$$

$$+C_1(h_1^2+h_2^2)+C_2(h_1^4+h_2^4)+\ldots \quad \ldots(14)$$

حيث $A_i, B_i, C_i \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ولا تعتمد على h_1 ، h_2 ، $i=1,2,..$ وبجمع الصيغ(11)،(12) و(13) ، (14) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy=h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1,y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)+$$

$$\left[\frac{h_1^3h_2}{24}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{24}D_y^2-\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3-\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y-\right.$$

$$\left.\frac{h_1^2h_2^3}{48}D_xD_y^2-\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3+\ldots\right)f(x_1,y_1)+A_1^*h_1^2+A_2^*h_2^2+$$

$$+A_3^*h_1^4+A_4^*h_2^4+\ldots \quad \ldots(15)$$

حيث A_i^* ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط لكل $i=1,2,\ldots$ ، وان

$$+g_1h_1^2+g_2h_1^4+\ldots \quad \ldots(16)$$

حيث a_i, g_i ثوابت لكل $i=1,2,\ldots$.

ملاحظة: (2)

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ ولكن على الاقل احدى المشتقات الجزئية لها غير معرفة عند النقطة (b,d) فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=M_i(h_i)+E_i(h_i)$$

$$M_i(h_i)=h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1,y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)$$

$$E_i(h_i)=\left[\frac{h_1^4}{24}D_x^2+\frac{h_1^5}{48}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y+\frac{h_2^4}{24}D_y^2\right.$$

$$+\frac{h_2^5}{48}D_y^3+\frac{h_1^2h_2^3}{48}D_xD_y^2+\frac{11h_1^6}{1920}D_x^4+\frac{11h_2^6}{1920}D_y^4+$$

$$\left..\right]f(x_{n-1},y_{m-1})+B_1^*h_1^2+B_2^*h_2^2+B_3^*h_1^4+B_4^*h_2^4\ldots]$$

حيث B_i^* ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط لكل $i=1,2,\ldots$.

البرهان :-

التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة ادناه يمكن كتابته :

$$\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = M_i(h_i) + E_i(h_i)$$

بما إن $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]$ وليس لها اعتلال ولكن المشتقات الجزئية للدالة غير معرفة عند النقطة (x_n,y_m) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_n,y_m) .

نستطيع أن نكتب :-

$$\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy + \sum_{r=0}^{m-2}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy + \int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy + \sum_{s=0}^{n-2}\int_{x_s}^{x_{s+1}} f(x,y)dxdy \quad \ldots(17)$$

بالنسبة للتكامل الرابع في المنطقة الجزئية $[x_{n-1},x_n]\times[y_{m-1},y_m]$ نستعمل متسلسلة تايلر حول النقطة (x_{n-1},y_{m-1}) أي إن

$$f(x,y) = \left(1+(x-x_{n-1})D_x+(y-y_{m-1})D_y+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+(x-x_{n-1})(y-y_{m-1})D_xD_y+\frac{(y-y_{m-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_{m-1})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_{m-1})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_{m-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4+\frac{(y-y_{m-1})^4}{4!}D_y^4+\ldots\right)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \ldots(21)$$

ومن الصيغتين (19) ، (21) نحصل على

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy = h_1h_2 f\left(x_n-\frac{1}{2}h_1,y_m-\frac{1}{2}h_2\right)+\frac{h_1^3h_2}{24}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{24}D_y^2+\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y+\frac{h_1^2h_2^3}{48}D_xD_y^2+\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3+\frac{33h_1^5h_2}{15360}D_x^4+\frac{33h_1h_2^5}{15360}D_y^4+\ldots)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \ldots(22)$$

أما بالنسبة للتكاملات الثلاثة الأولى التي هي ذات مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة للدالة $f(x,y)$ في جميع نقاط منطقة التكامل نلاحظ إن :

$$\int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy = h_1h_2\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1,y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)+A_1(h_1^2+h_2^2)+A_2(h_1^4+h_2^4)+\ldots \quad \ldots(23)$$

$$\sum_{r=0}^{m-2}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy = h_1h_2\sum_{r=0}^{m-2} f\left(x_{n-1}+0.5h_1,y_r+0.5h_2\right)+$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند (x_{n-1},y_{m-1}) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة (18) في المنطقة $[x_{n-1},x_n]\times[y_{m-1},y_m]$ نحصل على :-

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy = \left(h_1h_2+\frac{h_1^2h_2}{2}D_x+\frac{h_1h_2^2}{2}D_y+\frac{h_1^3h_2}{6}D_x^2+\frac{h_1^2h_2^2}{4}D_xD_y+\frac{h_1h_2^3}{6}D_y^2+\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{12}D_x^2D_y+\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2+\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3+\frac{h_1^5h_2}{120}D_x^4+\frac{h_1h_2^5}{120}D_y^4+\ldots)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \ldots(19)$$

ومن الصيغة (18) نحصل على

$$f\left(x_n-\frac{1}{2}h_1,y_m-\frac{1}{2}h_2\right) = \left(1+\frac{1}{2}h_1D_x+\frac{1}{2}h_2D_y+\frac{h_1^2}{8}D_x^2+\frac{1}{4}h_1h_2D_xD_y+\frac{h_2^2}{8}D_y^2+\frac{h_1^3}{48}D_x^3+\frac{h_1^2h_2}{16}D_x^2D_y+\frac{h_1h_2^2}{16}D_xD_y^2+\frac{h_2^3}{48}D_y^3+\frac{h_1^4}{384}D_x^4+\frac{h_2^4}{384}D_y^4+\ldots\right)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \ldots(20)$$

بضرب معادلة (20) بـ $-h_1h_2$ نحصل على

$$-h_1h_2f\left(x_n-\frac{1}{2}h_1,y_m-\frac{1}{2}h_2\right) = \left(-h_1h_2-\frac{1}{2}h_1^2h_2D_x-\frac{1}{2}h_1h_2^2D_y-\frac{h_1^3h_2}{8}D_x^2-\frac{1}{4}h_1^2h_2^2D_xD_y-\frac{h_1h_2^3}{8}D_y^2-\frac{h_1^3}{48}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{16}D_x^2D_y-\frac{h_1^3h_2^4}{16}D_xD_y^2-\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3-\frac{h_1^5h_2}{384}D_x^4-\frac{h_1h_2^5}{384}D_y^4-+\ldots\right)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \ldots(21)$$

$$B_1(h_1^2+h_2^2)+B_2(h_1^4+h_2^4)+... \quad ...(24)$$

$$\int_{x_s}^{x_{s+1}} f(x,y)dxdy = h_1h_2\sum_{s=0}^{n-2} f(x_s+0.5h_1, y_{n-1}+0.5h_2)+$$

$$C_1(h_1^2+h_2^2)+C_2(h_1^4+h_2^4)+... \quad ...(25)$$

حيث $A_i, B_i, C_i ...$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط ، $i=1,2,...$ وبجمع الصيغ (22) ،(23)،(24)، (25) نحصل على :-

$$\int_0^n f(x,y)dxdy = h_1h_2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h_1, y_0+\frac{2j-1}{2}h_2\right)+$$

$$+B_1^*h_1^2+B_2^*h_2^2+B_3^*h_1^4+B_4^*h_2^4+...+$$

$$\frac{h_2}{4}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{24}D_y^2+\frac{h_1^4h_2}{48}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{48}D_x^2D_y+$$

$$+\frac{h_1h_2^4}{48}D_y^3+\frac{11h_1^5h_2}{1920}D_x^4+\frac{11h_1h_2^5}{1920}D_y^4$$

$$+...)f(x_{n-1}, y_{m-1}) \quad ...(26)$$

حيث B_i^* ثوابت .

لذا فان صيغة الخطأ باستعمال قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين عندما $n=2m$ $\left(h_1=\frac{1}{2}h_2\right)$ في حالة الاعتلال في (x_0,y_0) أو (x_n,y_n) تكتب بالشكل الآتي :-

$$I-M_i(h_i)=q_1f_1(h_1)+q_2f_2(h_1)+...+R_1h_1^2$$
$$+R_2h_1^4+... \quad ...(27)$$

إذ إن $q_i, R_i, ...$ و a_i ثوابت و $i=1,2,...$ وان f_i دوال تعتمد على h_1 ، h_2.

الامثلة :-

مثال 1:- $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{\frac{x+y}{2}}dxdy$ وقيمته التحليلية 0.68954304003384 مقربة الى اربعة عشر مرتبة عشرية التكامل ذات مكامل معتل المشتقات الجزئية عند $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري والموضح بالتمثيل الهندسي (1) لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل باستخدام الصيغة (16) هي $E_i(h_i)=R_1h_1^2+a_1h_1^{5/2}+R_2h_1^4+R_3h_1^6...$ حيث R_i ، a_1 ثوابت، $i=1,2,...$ ،حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (1) عند تطبيق القاعدة (h_i) M_i .حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة عندما n=128، m=64 بينما ان القيمة بطريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المشار اليها تكون صحيحة الى ثلاث عشر مرتبة عشرية وبـ 2^{13} فترة جزئية .

مثال 2:- $I=\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1}\sin^{-1}\left(\frac{(x+y)}{2}\right)dxdy$ وقيمته التحليلية 0.21609118883984 مقربة لاربع عشرة مرتبة عشرية ،التكامل هنا ذات مكامل مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y)=(1,1)$ والمبين دالته في الشكل (2) لذلك فان صيغة حدود التصحيح حسب الصيغة (27) هي $E_i(h_i)=R_1h_1^2+a_1h_1^{2.5}+a_2h_1^{3.5}+R_2h_1^4+a_3h_1^{4.5}+R_3h_1^6...$ ، حيث R_i ، a_i ثوابت، $i=1,2,...$ ، نلاحظ من الجدول (2) عند تطبيق القاعدة (h_i) M_i حصلنا على سبع مراتب عشرية صحيحة عندما m=256 ، n=512 وعند استخدام تعجيل رومبرك مع القاعدة حصلنا على ثلاث عشر مرتبة عشرية صحيحة بـ 2^{17} فترة جزئية

مثال 3 :-

$I=\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1}\frac{x+y}{\sqrt{1-xy}}dxdy$ المبين دالته في الشكل (3) وقيمته التحليلية 0.6356744903916 مقربة لثلاثة عشر مرتبة عشرية هنا التكامل معتل المكامل عند $(x,y)=(1,1)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان حدود التصحيح باستعمال الصيغة (27) تكون $E_i(h_i)=a_1h_1^{3/2}+R_1h_1^2+a_2h_1^{5/2}+a_{\delta 3}h_1^{7/2}+R_2h_1^4+a_4h_1^{9/2}+...$ حيث R_i ، a_i ثوابت، $i=1,2,...$ ،الجدول (3) يبين النتائج المحصل عليها باستعمال الطريقة (h_i) M_i عندما m=256، n=512 حصلنا على قيمة صحيحة لاربع مراتب عشرية في حين حصلنا باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة (h_i) M_i على قيمة مطابقة لاثنا عشر مرتبة عشرية بـ 2^{17} فترة جزئية

مثال 4 :- $I=\int_0^1\int_0^1\frac{xy}{\sqrt{x+y}}dxdy$ وقيمته التحليلية 0.22315673814358 مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية المكامل هنا مستمر في منطقة التكامل عدا النقطة $(x,y)=(0,0)$ فهو معتل ونوع الاعتلال جذري وكما مبين في الشكل (4)،وفقا لصيغة (16) حصلنا على حدود التصحيح (صيغة الخطأ) $E_i(h_i)=R_1h_1^2+a_1h_1^{3.5}+R_2h_1^4+R_3h_1^6...$ حيث R_i ، a_1 ثوابت ان النتائج المحصل عليها باستعمال الطريقة المذكورة عندما m=64 ، n=128 ،كما موضح في الجدول (4) ان القيمة صحيحة الى اربع مراتب عشرية بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة (h_i) M_i نحصل

على قيمة صحيحة لثلاث عشر مرتبة عشرية بـ 2^{13} فترة جزئية .

مثال 5 :- $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^4 + y^4}\, dxdy$ وهو غير معروف التحليلية والموضح في الشكل البياني(5) وهو ذات مكامل معتل المشتقات الجزئية عند $(x, y) = (0,0)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل باستخدام الصيغة

$E_i(h_i) = R_1 h_1^2 + R\ h_2^{\ 4} + R\ h_3^{\ 6} \ldots$ (16)

حيث R_i ، $i = 1,2,\ldots$ ثوابت ، حصلنا على النتائج المدونة في الجدول(5) بالرغم من ان التكامل المذكور غير معروف القيمة التحليلية ألا اننا نرى من خلال الجدول عندما m=64 ، n=128 القيمة نفسها ثابتة أفقيا في الاعمدة الاربعة الاخيرة (k=6,8,10,12) لذا يمكن ان نقول بان قيمة هذا التكامل باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة $M_i(h_i)$ هي 0.54471470661241 مقربة الى اربعة عشر مرتبة عشرية بينما بدون استعمال تعجيل فانها صحيحة الى ثلاث مراتب عشرية .

4-المناقشة

يتضح من خلال جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة المعتلة المشتقة و المعتلة في منطقة التكامل بقاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي ضعف العدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة قيما صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات و باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رومبرك ، الا انه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك ، مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية مقارنة مع القيم التحليلية و بذلك يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة المعتلة المشتقة او المعتلة .

المصادر:-

1-Fox L. , " Romberg Integration for a Class of Singular Integrands " comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967 .

2-Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

3- Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973.

4-Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of NumericaIntegration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

5-Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi, pp 5-7 , 2008.

6 - محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة ، 1984.

7-عكار ، بتول حاتم ، "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2010.

8- ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=2.5	K=4	K=6	K=8	K=10
1	2	0.70147092536895						
2	4	0.69318117103179	0.69041791958607					
4	8	0.69057766124570	0.68970982465034	0.68955777030254				
8	16	0.68982445412550	0.68957338508543	0.68954408643067	0.68954317417255			
16	32	0.68961746443412	0.68954846787033	0.68954311721648	0.68954305260220	0.68954305067252		
32	64	0.68956237456236	0.68954401127178	0.68954305427413	0.68954305007797	0.68954305003791	0.68954305003542	
64	128	0.68954800877335	0.68954322017701	0.68954305029951	0.68954305003454	0.68954305003385	0.68954305003383	0.68954305003383

الجدول (1) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{\frac{x+y}{2}}dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=2.5	K=3.5	K=4	K=4.5	K=5.5	K=6	K=6.5
1	2	0.21330857545826								
2	4	0.21523268236633	0.21628501137744							
4	8	0.21584542326364	0.21618054238817	0.21614571939175						
8	16	0.21602407303876	0.21612177984518	0.21610219233084	0.21609284545019					
16	32	0.21607339534849	0.21610037061541	0.21609323420549	0.21609131056243	0.21609116174227				
32	64	0.21608656035757	0.21609376054012	0.21609155718168	0.21609119706223	0.21609118605744	0.21609118767845			
64	128	0.21608999982874	0.21609188093799	0.21609125440395	0.21609118938629	0.21609118864205	0.21609118881436	0.21609118886688		
128	256	0.21609088594603	0.21609137057967	0.21609120046023	0.21609118887651	0.21609118882708	0.21609118883941	0.21609118884057	0.21609118883998	
256	512	0.21609111211895	0.21609123581702	0.21609119089613	0.21609118884237	0.21609118883906	0.21609118883986	0.21609118883988	0.21609118883986	0.21609118883986

الجدول (2) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_{0.5}^1\int_{0.5}^1\sin^{-1}(\frac{(x+y)}{2})dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

m	n	$M_i(h_i)$	K=1.5	K=2	K=2.5	K=3.5	K=4	K=4.5	K=5.5	K=6
1	2	0.5822617186488								
2	4	0.6124056609964	0.6288919305007							
4	8	0.6262209845123	0.6337768358388	0.6354051376182						
8	16	0.6320034128308	0.6351659278910	0.6356289585751	0.6356770212683					
16	32	0.6342904077348	0.6355412067812	0.6356662997446	0.6356743182840	0.6356740562072				
32	64	0.6351628768473	0.6356400460496	0.6356729924724	0.6356744296503	0.6356744404482	0.6356744660642			
64	128	0.6354879090918	0.6356656751292	0.6356742181557	0.6356744813555	0.6356744863688	0.6356744894301	0.6356744905105		
128	256	0.6356070755350	0.6356722498269	0.6356744413928	0.6356744893301	0.6356744901033	0.6356744903523	0.6356744903950	0.6356744903923	
256	512	0.6356502892949	0.6356739236850	0.6356744816377	0.6356744902798	0.6356744903719	0.6356744903898	0.6356744903915	0.6356744903915	0.6356744903914

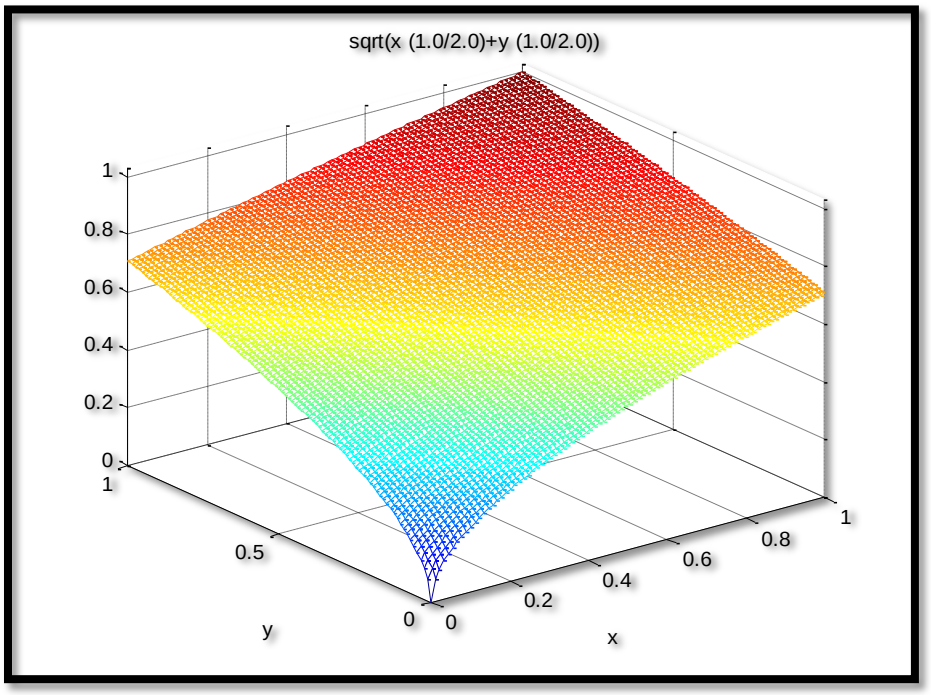
الجدول (3) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1}\frac{x+y}{\sqrt{1-xy}}dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=3.5	K=4	K=6	K=8	K=10
1	2	0.23987388196119						
2	4	0.22785480114653	0.22384844087498					
4	8	0.22439951219902	0.22324774921651	0.22318950715368				
8	16	0.22347510488229	0.22316696911004	0.22315913680545	0.22315711211557			
16	32	0.22323711584600	0.22315778616724	0.22315689580440	0.22315674640433	0.22315674059939		
32	64	0.22317690887460	0.22315683988413	0.22315674813409	0.22315673828941	0.22315673816060	0.22315673815103	
64	128	0.22316178799927	0.22315674770749	0.22315673877020	0.22315673814594	0.22315673814367	0.22315673814360	0.22315673814359

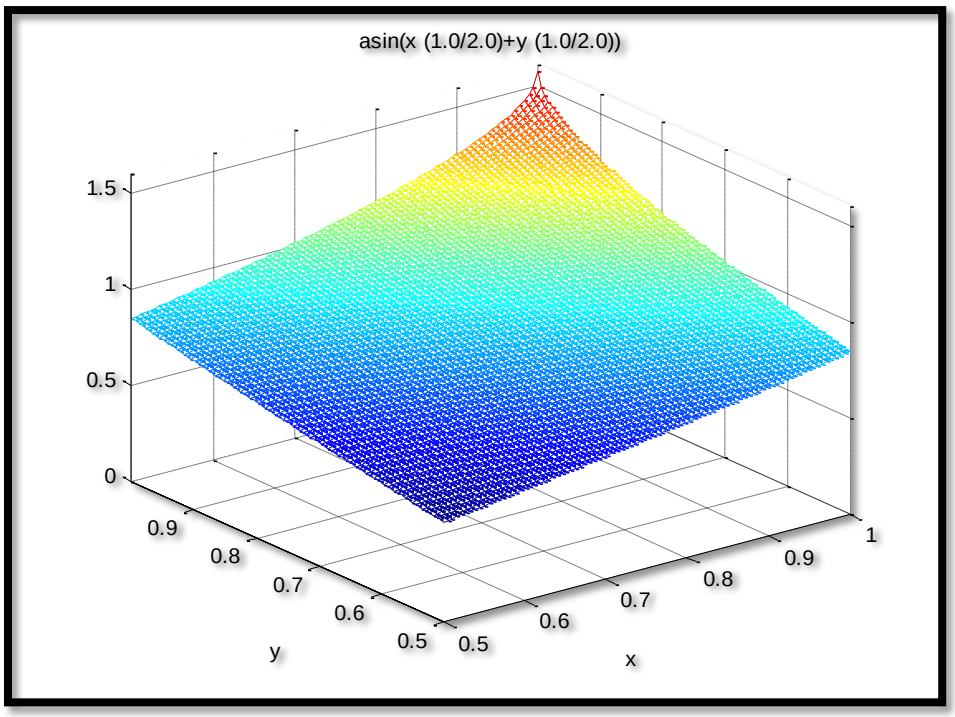
الجدول (4) يبين حساب التكامل الثنائي $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{xy}{\sqrt{x+y}}dxdy$ بطريقة $M_i(h_i)$

m	n	$M_i(h_i)$	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
1	2	0.43662385710668						
2	4	0.51993544285165	0.54770597143331					
4	8	0.53863965342613	0.54487439028429	0.54468561820769				
8	16	0.54320338301347	0.54472462620924	0.54471464193757	0.54471510263170			
16	32	0.54433733961648	0.54471532515082	0.54471470508026	0.54471470608252	0.54471470452743		
32	64	0.54462039384029	0.54471474524823	0.54471470658806	0.54471470661199	0.54471470661407	0.54471470661611	
64	128	0.54469113023017	0.54471470902679	0.54471470661203	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241

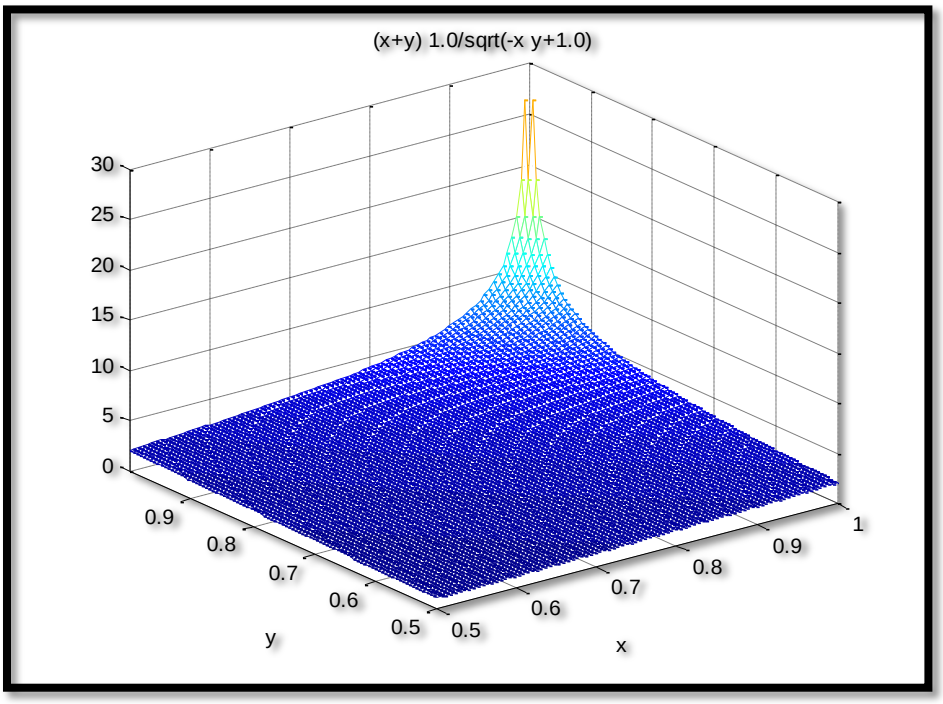
الجدول (5) يبين حساب التكامل الثنائي $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^4 + y^4}\,dx\,dy$ بطريقة $M_i(h_i)$



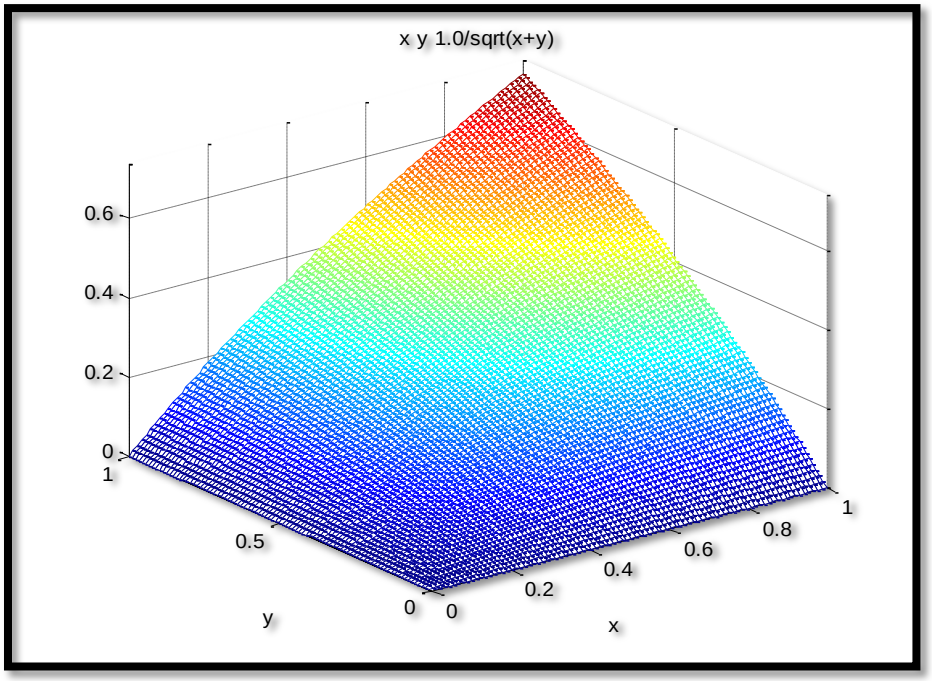
التمثيل الهندسي (1) يبين شكل الدالة $\sqrt{\frac{(x+y)}{2}}$ في المنطقة $[0,1]\times[0,1]$



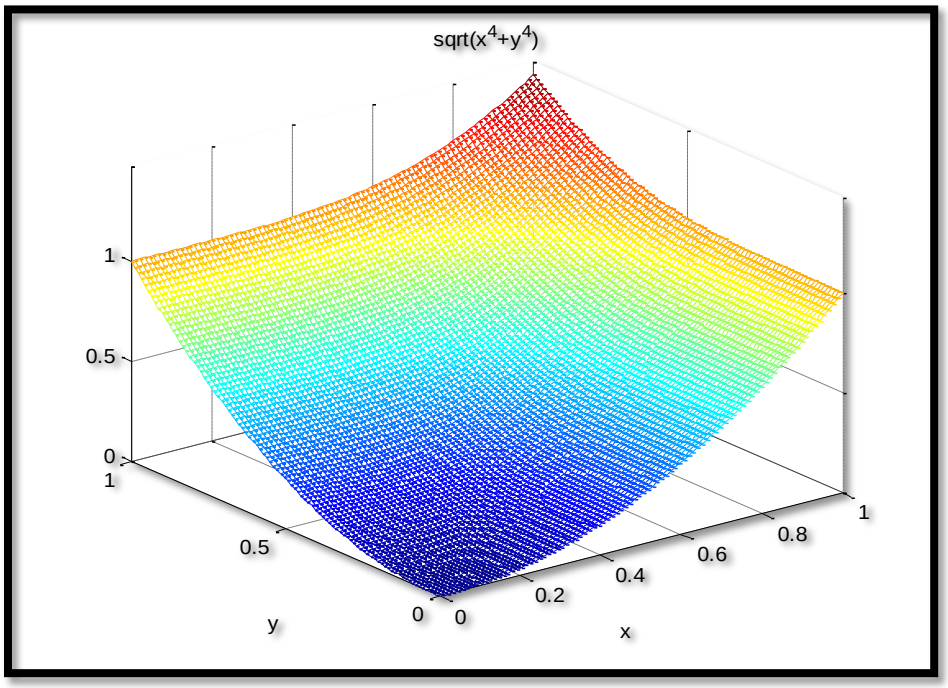
التمثيل الهندسي (2) يبين شكل الدالة $\sin^{-1}(\frac{(x+y)}{2})$ في المنطقة $[0.5,1]\times[0.5,1]$



التمثيل الهندسي (3) يبين شكل الدالة $\frac{x+y}{\sqrt{1-xy}}$ في المنطقة $[0.5,1]\times[0.5,1]$



التمثيل الهندسي(4) يبين شكل الدالة $\frac{xy}{\sqrt{x+y}}$ في المنطقة $[0,1]\times[0,1]$



التمثيل الهندسي (5) يبين شكل الدالة $\sqrt{x^4+y^4}$ في المنطقة $[0,1]\times[0,1]$