طريقة تعجيل ايتكن مع قاعدة النقطة الوسطى لحساب التكاملات الثلاثية عدديا ذات المكاملات المستمرة والمعتلة المشتقة و المعتلة

أ.علي حسن محمد

جامعة الكوفة - كلية التربية للبنات - قسم الرياضيات

م. م. رسل حسن ناصر

جامعة الكوفة - كلية التربية للبنات - قسم الحاسبات

المستخلص:-

نعمل في هذا البحث على إستخدام أسلوب جديد لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية سواء كانت مكاملاتها مستمرة أو معتلة أو مستمرة لكن على الأقل إحدى مشتقاتها معتلة في إحدى نهايتي فترة التكامل أو كليهما . وقد قمنا باختيار قاعدة النقطة الوسطى كونها أفضل صيغ نيوتن - كوتس (في معالجة مشاكل الإعتلال) كذلك لكونها بسيطة في التطبيق وسيتم تطبيقها على الأبعاد الثلاثة عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلية $[a, b]$ تساوي عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الوسطى $[c, d]$ وأيضا مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجية $[e, f]$ أي إن $(\bar{h} = \bar{h} = h)$ ثم نطبق تعجيل ايتكن على القيم الناتجة وذلك لتعجيل التقارب Accelerating Convergence والحصول على نتائج أفضل وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز AMMM حيث A طريقة تعجيل ايتكن و MMM قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد الثلاثة .

1- المقدمة:- إن إيجاد قيم التكاملات الثلاثية تحليليا ليس من السهل في كثير من الأحيان لذا أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات . وتكمن أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم ولإيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن. فرانك آيرز [6]. ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على إيجاد قيمة التكامل الثلاثي هي ضياء [4] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة وهي طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي (z) وكل من الطرائق $RM(RS)$, $RM(RM)$ و $RS(RM)$ إضافة الى طريقة $RS(RS)$ على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي y و x وهذه الطرائق هي

طريقة $RMRM(RM)$ ، $RMRM(RS)$ و $RMRS(RM)$ وكانت النتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة والوقت المستغرق في حساب النتائج وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي هي الأفضل عند حساب تكاملات مكاملاتها مستمرة ومستمرة لكن مشتقاتها معتلة أو تكاملات مكاملاتها معتلة (التي من الممكن جعل اعتلالها في البعد الخارجي z فقط). أما الأسلوب المقترح في عام 2010 من قبل الباحثة عكار [5] لحساب قيم التكامل الثلاثي فهي طريقة مركبة من تعجيل رومبرك وقاعدة النقطة الوسطى و المطبقة على الأبعاد الثلاثة (الداخلي والأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي للتكامل مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط للتكامل ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي للتكامل أي أن مسافات بين الإحداثيات على المحور x مساوية للمسافات بين

2- طريقة MMM :-

يمكن الحصول على صيغة هذه الطريقة من خلال تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاث عندما $m = n_1 = n_2$ عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a, b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c, d]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[e, f]$ أي إن

$$\bar{h} = \frac{d-c}{n_2}, \quad \bar{h} = \frac{f-e}{m} \quad \text{حيث ان } (\bar{h} = \bar{h} = h)$$

$$h = \frac{b-a}{n_1}, \quad \text{نفرض التكامل الثلاثي}$$

$$I = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad \dots(1)$$

بما إن $\bar{h} = \bar{h} = h$ فإنه يمكن كتابة الصيغ العددية للتكامل المعرف بالصيغة (1) باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة x, y, z بالصيغة الآتية :-

التقريبية للتكامل الثلاثي I .

ويمكننا تحسين كل ثلاث قيم تقريبية تنتج من

الصيغة (2) بتطبيق طريقة تعجيل ايكن عليها وبذلك

نحصل على قيمة للتكامل الثلاثي بطريقة تعجيل

ايكن مع قاعدة النقطة الوسطى وعلى الأبعاد الثلاثة

$$x, y, z \text{ و } .$$

وهكذا نستمر بتطبيق قاعدة MMM بالنسبة لبقية قيم

$m = n_1 = n_2 > 3$ ثم نطبق عليها طريقة تعجيل

ايكن لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة الحقيقية للتكامل

إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المرغوبة التي

نختارها .

3- طريقة أيتكن دلتا التربيعية Aitken's

delta - Squared Process في عام 1926

وجد ألكسندر أيتكن (1895-1964) منهجاً جديداً

لتعجيل نسبة تقارب المتابعة المحسوبة في إيجاد

قيمة مسألة ما [3].

عكار [5]

سواء كان المكامل $f(x, y, z)$ مستمر في منطقة

التكامل أو معتل أو معتل في إحدى مشتقاتها الجزئية

بالنسبة لـ x أو y أو z . حيث أن

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ و } x_i = a + \frac{2i-1}{2}h$$

$$j = 1, 2, \dots, n \text{ و } y_j = c + \frac{2j-1}{2}h$$

$$k = 1, 2, \dots, n \text{ و } z_k = e + \frac{2k-1}{2}h$$

(استخدمنا n لأننا فرضنا أن $m = n_1 = n_2 = n$)

فعند وضع $m = n_1 = n_2 = 1$ في الصيغة أعلاه يتم

حساب القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي من خلال

حساب $MMM(h) = h^3 f(x_1, y_1, z_1)$ ونثبت في

جدولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m = n_1 = n_2 = 1$

ثم نضع $m = n_1 = n_2 = 2$ أي نحسب

$$MMM(h) = h^3 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 f(x_i, y_j, z_k)$$

هذه القيمة في الجداول . بعد ذلك

نضع $m = n_1 = n_2 = 3$ نحسب

$$MMM(h) = h^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 f(x_i, y_j, z_k)$$

يتم أيضاً

{S} تقترب أسرع الى β من المتتابة $\{x_n\}$

حيث

$$s_{i+2} = x_{i+2} - \frac{(\square x_{i+1})^2}{\square x_i} \dots (5)$$

إذ ان $i = 1, 2, \dots, n-2$

إن هذه العملية ماهي إلا عملية تعجيل إقتراب

المحصل عليها بطريقة ما إلى القيمة النهائية β .

فإذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة

تسريع MMM فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة

تعجيل ايتمكن وذلك باستخدام المعادلة (5) ثم نستخدم

أيضا تعجيل ايتمكن على القيمة $n-2$ فنحصل على

$n-4$ قيمة وهكذا نستمر إلى أن نحصل على الدقة

المرغوبة. محمد [8] وناصر [7].

ملاحظة : في قاعدة النقطة الوسطى استخدمتا قيم

$n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$. ناصر [7].

ولتوضيح الطريقة نفرض المتتابة $\{x_n\}$

حيث $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ تقترب خطياً

Linearly Convergence إلى قيمة نهائية

معينة β

$$\beta - x_{i+1} = C_i(\beta - x_i)$$

إذن

$$|C_i| < 1 \quad \text{بحيث}$$

$$C_i \rightarrow C \quad \text{وان}$$

نلاحظ ان C_i ستكون تقريبا ثابتة ويمكننا كتابة

$$\beta - x_{i+1} \approx \bar{C}(\beta - x_i) \dots (3)$$

حيث $|\bar{C}| = C$ ونلاحظ كذلك ان

$$\frac{\beta - x_{i+2}}{\beta - x_{i+1}} \approx \frac{\beta - x_{i+1}}{\beta - x_i}$$

أي ان :

$$\beta \square \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = x_{i+2} - \frac{(\square x_{i+1})^2}{\square x_i} \dots (4)$$

حيث ان $\square x_i = (x_{i+1} - x_i)$ وان

$$\square^2 x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$$

تسمى هذه العملية بطريقة أيتكن دلنا التربيعية .

رالستون [1]

وعند استخدام n من عناصر المتتابة $\{x_n\}$ يمكننا

الحصول على $n-2$ من عناصر متتابة أخرى

$$I = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x e^{-(x+y+z)} dx dy dz$$

معرف لكل $(x, y, z) \in [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$ إن

إن قيمته الحقيقية هي 0.0052567435 (مقربة

إلى عشر مراتب عشرية) والنتائج المحصل عليها

بطريقة *MMM* وتعجيل ايتكن مدونة في الجدول

(2).

<i>AMMM</i>	<i>AMMM</i>	<i>AMMM</i>	<i>MMM</i>	$m = n_1 = n_2$
			0.0055544 983	1
			0.0053482 293	2
		0.0052479 977	0.0052807 754	4
		0.0052563 171	0.0052628 255	8
	0.0052567 385	0.0052567 182	0.0052582 686	16
	0.0052567 434	0.0052567 419	0.0052571 250	32
0.0052567 435	0.0052567 435	0.0052567 434	0.0052568 389	64

الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x e^{-(x+y+z)} dx dy dz$$

نستنتج من الجدول (2) انه عندما

$m = n_1 = n_2 = 64$ إن قيمة التكامل المحصل عليها

بقاعدة *MMM* صحيحة لست مراتب عشرية

وباستعمال طريقة تعجيل ايتكن مع القاعدة المذكورة

حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية

عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ (2^{18} فترة جزئية) أي

مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لعشر مراتب عشرية)

وأیضا نلاحظ من الجدول بان القيمة

عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ صحيحة إلى خمس مراتب

عشرية بطريقة *MMM*

4- الأمثلة:- إن مكامل التكامل

$$I = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \ln(x+y+z) dx dy dz$$

معرف لكل $(x, y, z) \in [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$ إن

إن قيمته الحقيقية 1.4978022886 (مقربة إلى عشر

مراتب عشرية) النتائج بطريقة *MMM* وتعجيل ايتكن

عليها مدونة في الجدول (1)

<i>AMMM</i>	<i>AMMM</i>	<i>MMM</i>	$m = n_1 = n_2$
		1.5040773968	1
		1.4993968399	2
	1.4977935551	1.4982026237	4
	1.4978017204	1.4979024799	8
1.4978022898	1.4978022527	1.4978273432	16
1.4978022887	1.4978022863	1.4978085526	32

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \ln(x+y+z) dx dy dz$$

نستنتج من الجدول (1) انه عندما

$m = n_1 = n_2 = 32$ فان قيمة التكامل باستخدام

قاعدة *MMM* تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية

وعند استعمال طريقة تعجيل ايتكن مع القاعدة

المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب

عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ (2^{15} فترة جزئية)

بفارق وحدة واحدة فقط في المرتبة العاشرة .

بالرغم من ان المكامل معتل المشتقة في النقطة (0,0,0) إلا إن تقارب القيم المحصل عليها كان سريعا نحو القيمة التحليلية بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية المستخدمة.

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z}}$$

أما التكامل فهو معتل المكامل

عندما $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ونوع الاعتلال جذري إذ إن قيمته الحقيقية هي 0.8628770771 (مقربة إلى عشر مراتب عشرية) وقد دونا النتائج المحصل عليها في الجدول (4) بطريقتي

AMMM و MMM .

AMMM	AMMM	AMMM	MMM	$m = n_1 = n_2$
			0.8164965 809	1
			0.8465544 520	2
		0.8645582 163	0.8578140 528	4
		0.8631324 085	0.8614262 327	8
	0.8628769 708	0.8629157 803	0.8624808 782	16
	0.8628773 115	0.8628831 127	0.8627720 585	32
0.8628771 892	0.8628771 208	0.8628780 495	0.8628497 642	64
0.8628770 739	0.8628770 832	0.8628772 380	0.8628700 617	128

الجدول (4) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z}}$$

نلاحظ من الجدول (4) انه عندما

$m = n_1 = n_2 = 128$ فان قيمة التكامل المحصل

عليها باستخدام قاعدة MMM صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل إبتكن مع القاعدة المذكورة صحيحة لثمان مراتب عشرية عندما

$m = n_1 = n_2 = 128$ (فترة جزئية) ويعود سبب

تباطئ القيم في الاقتراب إلى القيمة الحقيقية للتكامل

أما مع تعجيل إبتكن فصحيحة إلى تسع مراتب عشرية بفارق وحدة واحدة في المرتبة التاسعة.

في التكاملين أعلاه المكامل مستمر في منطقة التكامل فكانت القيم تتقارب بشكل سريع الى القيمة التحليلية بعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئية المستخدمة .

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x+y+z} dx dy dz$$

أما مكامل التكامل

معتل المشتقات الجزئية عندما $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ونوع الاعتلال جذري إذ إن قيمته الحقيقية هي 1.2056568615 (مقربة إلى عشر مراتب عشرية) و النتائج المحصل عليها مدونة في

الجدول (3) بطريقتي AMMM و MMM .

AMMM	AMMM	AMMM	MMM	$m = n_1 = n_2$
			1.224744 8714	1
			1.211094 2921	2
		1.205449 7021	1.207100 9649	4
		1.205632 3383	1.206027 2271	8
	1.205657 2179	1.205654 2350	1.205750 3988	16
	1.205656 8826	1.205656 5970	1.205680 3371	32
1.205656 8612	1.205656 8627	1.205656 8359	1.205662 7389	64

الجدول (3) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x+y+z} dx dy dz$$

نلاحظ من الجدول (3) عندما $m = n_1 = n_2 = 64$

فان قيمة التكامل باستخدام قاعدة MMM صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستخدام تعجيل إبتكن مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية عندما

$m = n_1 = n_2 = 64$ (فترة جزئية) 2^{18}

فترة جزئية) بفارق ثلاث وحدات في المرتبة العاشرة

5- المناقشة :-

نستنتج من خلال نتائج الجداول أعلاه انه عند حساب التكاملات الثلاثية بقاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة x, y, z , عندما $m = n_1 = n_2$ و القاعدة MMM تعطي قيمة صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل اي تكن عليها إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال تطبيق تعجيل اي تكن على القاعدة MMM المذكورة كانت النتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات الحقيقية وان سلوك المكامل كان له الأثر الكبير في سرعة اقتراب النتائج إلى القيم التحليلية وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

المصادر

- [1] Anthony Ralston " A First Course in Numerical Analysis " Mc Grow – Hill Book company 1965 , pp-87-94 , 114-133 , 347.
- [2] Fausett L. V. , " Applied Numerical Analysis Using Matalb ",second edition, Person Prentice-Hall , pp. 416-430 ,2008 .
- [3]WIKIPEDIA . The Free Encyclopedia .[online] available from WWW:< URL :http:// en . wikipedia.org / wiki / Alexander_Aitken .
- [4] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية

نسبة إلى التكامل الأول والثاني والثالث كون المكامل معتل في النهايات السفلى لحدود التكامل .

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy^2 dx dy dz}{\sqrt{1-xyz}}$$

أما التكامل فهو معتل

المكامل عندما $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ونوع الاعتلال جزري . إذ إن قيمته الحقيقية هي 0.2 ودونا النتائج المحصل عليها بالطريقتين MMM و $AMMM$ في الجدول (5)

AMMM	AMMM	AMMM	MMM	$m = n_1 = n_2$
			0.13363 06210	1
			0.17949 99872	2
		0.20078 26894	0.19403 75001	4
		0.20015 78040	0.19834 45378	8
	0.19999 44814	0.20002 83231	0.19955 50771	16
	0.19999 98121	0.20000 49571	0.19988 30650	32
0.19999 99993	0.19999 99930	0.20000 08628	0.19996 97350	64

الجدول (5) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy^2 dx dy dz}{\sqrt{1-xyz}}$$

نلاحظ من الجدول (5) عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ فان قيمة التكامل المحصل عليها باستخدام قاعدة MMM تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية وباستخدام تعجيل اي تكن مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ (فترة جزئية) بفارق سبع وحدات في المرتبة العاشرة. هنا بالرغم من وجود الإعتلال في الحدود العليا للمكامل إلا ان تقارب القيم العددية إلى القيمة التحليلية للتكامل كان أسرع من تقارب قيمة التكامل الرابع.

University of Kufa - College of
Education for Girls - Department of
Computers

Abstract

On this search we work to we new style to evaluate triple integrals numerically when its integrands continuous or singular or continuous but at least one of its derivatives singular . We choose the mid-point rule for this purpose , since it is better than the other Newton-Cotes formula (for treatment problems of singularity)and it is simple at application ,and we apply it for the three dimensions when the number of subintervals of interval $[a ,b]$ equal to the number of subintervals of interval $[c,d]$ and also equal to the number of subintervals of interval $[e,f]$,that is mean $(h =h =h)$ alsowe wll use Aitken's acceleration on the yielded values to improve the values ,and we will indicate to this method by asyemble AMMM when A indicates to Aitken's method and MMM indicates to mid-point rule on the three dimensions.

باستخدام لغة Matlab " ,رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .
[5] عكار , بتول حاتم , "بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2010.
[6] فرانك أيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين , 1972
[7] ناصر , رسل حسن, " المقارنة بين الطريقتين التجليليتين ايتكن ورومبرك في حساب التكاملات عدديا " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2011.
[8] محمد , علي حسن , و ناصر , رسل حسن , " حساب تكاملات أحادية ذات مكاملات مستمرة ومعتلة المشتقة و معتلة بأستخدام الطريقة التجليليه ايتكن على صيغ نيوتن- كوتس " , مجلة جامعة كربلاء , العدد الرابع , 2011 .

Aitken's Acceleration Method With mid-point rule to Evaluation Triple Integrals Numerically with Continuous ,Singular Derivatives and Singular Integrands

Prof. Ali Hassan Mohammed

University of Kufa - College of
Education for Girls - Department of
Mathematics
and

Assis. Lecturer. Rusul Hassan Naser