

حساب دالة الانتشار النقطية لفتحة بيضوية ذات عائق بيضوي

طالب عبد الرضا عبد الواحد

جامعة الكوفة /كلية العلوم/ قسم الفيزياء

الخلاصة

تم في هذا البحث دراسة تأثير عائق بيضوي الشكل مركزي موجود داخل فتحة بيضوية في دالة الانتشار النقطية (PSF) لنظام محدد بالحيود ولقيم مختلفة من نسب الإعاقة ($\epsilon=0.25,0.5,0.75$) فأظهرت النتائج أن زيادة نسبة الإعاقة أدت إلى نقصان في قيم الدالة (PSF).

و درس تأثير نسبة الاستطالة للفتحة البيضوية والعائق البيضوي في دالة الانتشار النقطية (PSF) لان زيادة الاستطالة على المحور الأفقي أدت إلى تحسين واضح في قيم الدالة (PSF).

Calculation of Point Spread Function for Elliptical Aperture with Elliptical Obscuration

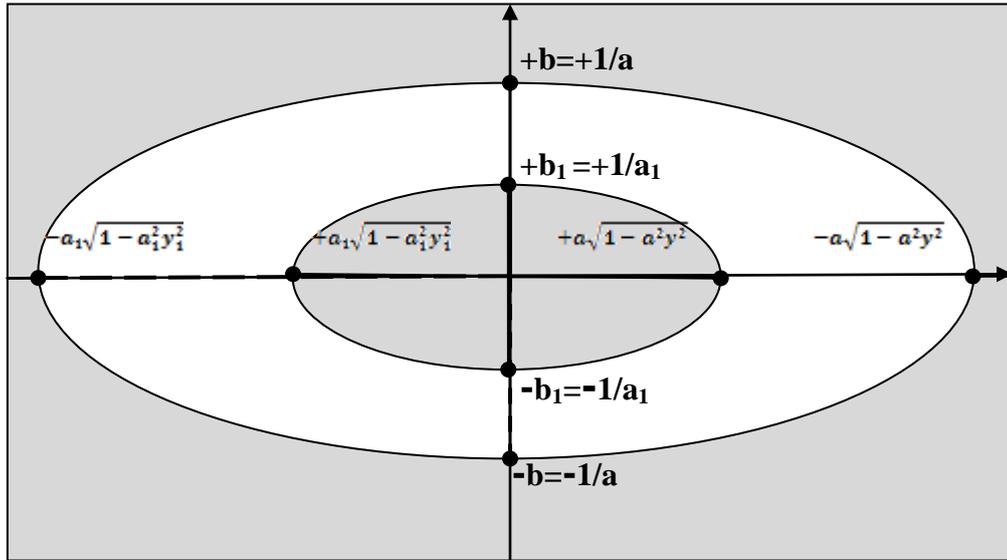
Talib A. Abdul Wahid

University of Kufa - College of Science – Physics Dep.

Abstract

We have been studied the effect of central elliptical obscuration inside elliptical aperture on the point spread function(PSF) to diffraction – limited system of different values of obscurative ratios ($\epsilon=0.25,0.5,0.75$), where the results showed that the increase of obscurative ratio yield to decrease in (PSF).

Elongation ratio also was studied for elliptical aperture and elliptical obscuration on (PSF) where the elongation increment for horizontal axis (major axis) leading to significant improving in (PSF).



الشكل (1) يمثل فتحة بيضوية ذات عائق بيضوي

2- اشتقاق دالة الانتشار النقطية (PSF)

1- المقدمة

نلاحظ من الشكل(1) أعلاه فتحة بيضوية طول محورها الرئيس (a) منطبق على المحور السيني (x) وطول محورها الثانوي (b) منطبق على المحور الصادي (y) وضمن هذه الفتحة البيضوية عائق بيضوي طول محوره الرئيس (a₁) منطبق على المحور السيني (x) وطول محوره الثانوي (b₁) منطبق على المحور الصادي (y) وان نسبة الإعاقة (ε) هي النسبة بين طول المحور الرئيس للفتحة البيضوية (a) وطول المحور الرئيس للعائق البيضوي (a₁) وهي نفسها النسبة بين طولي المحورين الثانويين للفتحة البيضوية والعائق البيضوي (b) و(b₁) أي ان

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \dots \dots \dots (1)$$

ان مساحة الفتحة البيضوية (T) تعطى ب

$$T = ab\pi$$

وبما أن مساحة الفتحة البيضوية تعابير لتساوي π لذلك

$$T = ab\pi = \pi$$

$$ab = 1$$

$$a = \frac{1}{b} \dots \dots \dots (2)$$

يمكن تحديد كفاءة العدسة المصنوعة من خلال تعيين نوعية الصورة التي تكونها المنظومة البصرية [2,1]. إن قياس دالة الانتشار من العوامل المهمة المستخدمة في التقويم نوعية الصورة لجسم نقطي أو خطي أو حافة حادة , لان هذه الدالة تعتمد بشكل رئيس على الحيود المتولد بواسطة فتحة العدسة [4,3] وتعد دالة الانتشار النقطية بشكل خاص من الدوال المهمة جدا في التقويم الجيد للصورة [6,5].

إن استخدام فتحة حلقيّة في منظومة بصرية والذي يعني حجب مركز الفتحة له تطبيقات عملية مهمة إذ استخدمت هذه التقنية في التصوير وفي المنظومات الكتريوبترية (catadioptric) وكذلك في التلسكوبات الفلكية [8,7].

ولوحظت لأول مرة القمة المركزية لشدة الصورة المتكونة خلف عائق دائري من قبل العالمان (maraldi and deslisle) [9] أما الحسابات النظرية فقد أجراها لأول مرة العالم (Airy) [10] وذلك بدراسة الحيود بواسطة الفتحات الحلقيّة . أما الأهمية الحاصلة لضيق القمة المركزية والزيادة الحاصلة في شدة الحلقات الخارجية عند استخدام فتحة حلقيّة فقد أشار لها (Rayleigh) [11].

ولغرض إيجاد دالة الانتشار النقطية الخاصة بالمنظومة المحتوية على فتحة بيضوية ذات عائق بيضوي [13,12] نلاحظ من الشكل (1) ان منطقة الفتحة البيضوية و (p) منطقة العائق البيضوي المركزي.

حيث ε نسبة نصف قطر العائق الى نصف قطر الدائرة وتدعى بنسبة الإعاقة او الحجب المركزي (Obscurities Ratio) للفتحة الحلقية وتتراوح قيمتها $(0 \leq \varepsilon < 1)$.

وبذلك يمكن حساب منطقة الحلقة (Q) من حاصل طرح منطقة العائق من المساحة الكلية [14, 12]: -

$$Q = p - p^1 \dots \dots \dots (7)$$

يمكن التعبير عن السعة المعقدة للفتحة البيضوية (المعقدة) بدلالة دالة البؤيو ، باستخدام تحويلات فورير (Fourier Transform) لدالة البؤيو (pupil Function) [15] .
وبما ان :

$$f(x,y) = \tau(x,y) e^{ik\omega(x,y)} \dots \dots \dots (8)$$

حيث أن $e^{ik\omega(x,y)}$ تمثل دالة زيف جبهة الموجة .
(x,y) إحداثيات بؤيو الإخراج .
 $\omega(x,y)$ تمثل دالة الزيوغ .

$\tau(x,y)$ تمثل توزيع السعة الحقيقية (Real Amplitude) وغالباً ما يوضع مساوياً للوحدة الواحدة (unity) .

فان دالة الانتشار النقطية تأخذ الصيغة التكاملية الآتية :

$$F(u,v) = \frac{1}{A} \int \int_y f(x,y) e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy \dots (9)$$

حيث أن : A تمثل مساحة بؤيو الإخراج .

F(u,v) تمثل السعة المعقدة في مستوي الصورة

(u,v) إحداثيات مستوي الصورة .

ان معادلة الفتحة البيضوية العامة هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

وباستخدام المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore x = \pm a \sqrt{1 - a^2 y^2} \dots \dots \dots (3)$$

والمعادلة (3) تمثل حدود التكامل للفتحة البيضوية

على طول المحور السيني كما هو موضح بالشكل (1) .

اما حدود التكامل للفتحة البيضوية على طول المحور

الصادي فيعطى بالعلاقة الآتية :

$$y = \pm b = \pm \frac{1}{a} \dots \dots \dots (4)$$

اما ما يخص معادلة العائق البيضوي فانها تكون :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$$

$$\therefore x_1 = \mp a_1 \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b_1^2}}$$

وبالتعويض عن قيمتي a1 و b1 في المعادلة (1) :

$$x_1 = \pm a \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{\varepsilon^2 b^2}} = \pm a \varepsilon \sqrt{1 - \frac{a^2 y_1^2}{\varepsilon^2}}$$

حيث ان $b = \frac{1}{a}$

$$x_1 = \pm a \sqrt{\varepsilon^2 - a^2 y_1^2} \dots \dots \dots (5)$$

ان هذه المعادلة تمثل حدود التكامل للعائق البيضوي

على طول المحور السيني .

اما حدود التكامل للعائق البيضوي على طول

المحور الصادي (y) فتكون :

$$y_1 = \pm b_1 = \pm \varepsilon b = \pm \frac{\varepsilon}{a} \dots \dots \dots (6)$$

وفي حالة كون النظام محددًا بالحيود فإن دالة الزيف =0

(حسب) $f(x,y)=1$ وبذلك تكون دالة البؤبؤ $\omega(x,y)$

المعادلة (8)، ولإيجاد قيمة عامل المعايرة التي تجعل الدالة

$G(u,v)=1$ عندما $z \rightarrow 0$ فأنا نكامل المعادلة (13)

[14 ، 12

نفترض أن :

$$\therefore G_{(z)=1} = n \cdot f \left[\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-a\sqrt{1-y^2a^2}}^{+a\sqrt{1-y^2a^2}} dx dy - \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{+\varepsilon}{a}} \int_{-a\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}} dx_1 dy_1 \right]^2 \quad (10)$$

لان $n \cdot f$ يمثل عامل المعايرة (Normalizing Factor) $m = 2\pi v$ تكون المعادلة (10) $z = 2\pi u$ وباعتبار أن

بالشكل الاتي:

$$1 = n \cdot f \left[\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} 2a\sqrt{1-y^2a^2} dy - \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{+\varepsilon}{a}} 2a\varepsilon \sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}} dy_1 \right]^2 \left[\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-a\sqrt{1-y^2a^2}}^{+a\sqrt{1-y^2a^2}} f(x,y) e^{i(zx+my)} dx dy \right]^2 \quad (11)$$

ويمكن الاكتفاء بمحور واحد في مستوي الصورة لتشابه

ولتبسيط إجراء التكامل نفرض أن :-

توزيع الشدة على كل من المحورين m, z (أي يمكن

وضع $m=0$) وبذلك يكون :

$$ay = \sin \alpha$$

$$ady = \cos \alpha d\alpha \quad \text{لذلك}$$

$$\frac{ay_1}{\varepsilon} = \sin \beta$$

$$\frac{a}{\varepsilon} dy_1 = \cos \beta d\beta \quad \text{لذلك}$$

$$G_{(z)} = n \cdot f \left[\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-a\sqrt{1-y^2a^2}}^{+a\sqrt{1-y^2a^2}} f(x,y) e^{izx} dx dy \right]^2 \quad (12)$$

وباستخدام المفهوم الفيزيائي للمعادلة (7) وبالتعويض عن حدود

تكامل العائق بالمعادلات (3,4,5,6) نحصل على:

$$psf = G_{(z)} = n \cdot f \left[\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-a\sqrt{1-y^2a^2}}^{+a\sqrt{1-y^2a^2}} f(x,y) e^{izx} dx dy - \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{\frac{+\varepsilon}{a}} \int_{-a\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}} f(x_1,y_1) e^{iz_1x_1} dx_1 dy_1 \right]^2$$

لذلك عندما

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{فان} \quad y = \frac{1}{a}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \text{فان} \quad y = -\frac{1}{a}$$

$$psf = G(z) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \left| \int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) e^{izx} dx dy \right|^2 \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن} \quad y_1 = \frac{\varepsilon}{a}$$

$$\left| \int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) e^{izx} dx dy \right|^2 \quad \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{فإن} \quad y_1 = -\frac{\varepsilon}{a}$$

$$\left| \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{+\frac{\varepsilon}{a}} \int_{-\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}} f(x_1,y_1) e^{iz_1x_1} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad \therefore psf = G_{(0)} = 1 = n \cdot f \left| 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha - 2 \right|^2$$

$$1 = n \cdot f \left| 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha - 4\varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta \right|^2 \quad (16)$$

وبالتعويض عن قيمة $f(x,y)$ حسب المعادلة (8) بـ

(16) المعادلة في $\tau(x,y)=1$ باعتبار $e^{ik\omega(x,y)}$

$$\therefore n \cdot f = \frac{1}{\pi^2 (1-\varepsilon^2)^2} \dots \dots \dots (15)$$

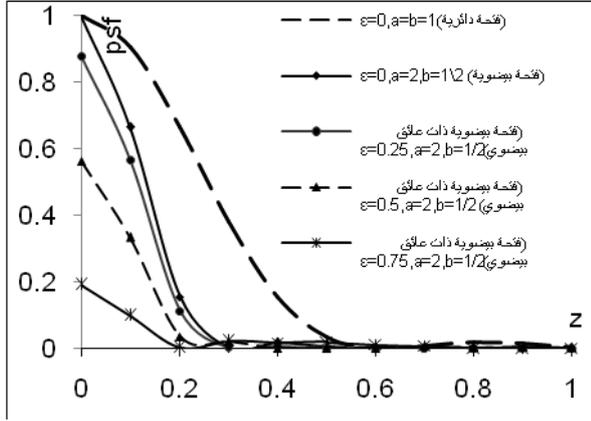
$$psf = G(z) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \left| \int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} e^{ik\omega(x,y)} e^{izx} dx dy \right|^2$$

$$\left| \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{+\frac{\varepsilon}{a}} \int_{-\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}} e^{ik\omega(x_1,y_1)} e^{iz_1x_1} dx_1 dy_1 \right|^2$$

وبتعويض قيمة $(n \cdot f)$ من المعادلة (15) في المعادلة (13) نحصل على :

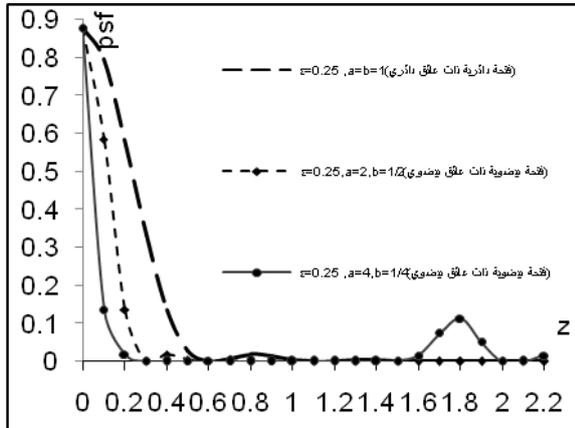
$$psf = G(z) = \frac{1}{\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \left| \int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} e^{i2\pi(\omega(x,y)+zx)} dx dy \right|^2$$

$$\left| \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{+\frac{\varepsilon}{a}} \int_{-\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+\frac{a\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2y_1^2}{\varepsilon^2}}}} e^{i2\pi(\omega(x_1,y_1)+z_1x_1)} dx_1 dy_1 \right|^2 \dots (17)$$



الشكل (2) يمثل قيم (PSF) على طول المحور البصري Z لفتحات معاقة ذات شكل دائري وبيضوي ولقيم مختلفة من نسب الإعاقة (ε=0.25,0.5,0.75) لنظام محدد بالحيود .

اما الشكل (3) فانه يبين العلاقة بين قيم دالة الانتشار النقطية (PSF) على طول المحور البصري (z) لنظام محدد بالحيود وفتحات مختلفة الشكل ذات اعاقه (ε=0.25) اذ تم اخذ فتحة دائرية (a=b=1) وفتحتين بيضويتين محورهما الكبير (a) منطبق على المحور (x) (راجع الشكل 1)



الشكل (3) يمثل قيم (PSF) على طول المحور البصري Z لفتحات معاقة (ε=0.25) لها شكل دائري وبيضوي ولقيم مختلفة من استطالة الشكل البيضوي (a=b=1) لنظام محدد بالحيود .

وواضح من الشكل (3) ان قيم دالة الانتشار النقطية (PSF) للفتحات الثلاثة اعلاه كلها تبدأ بقيمة (0.897) عندما z=0 ولكن بالنسبة للفتحة البيضوية ذات المحور الكبير a=2 فان منحنى الدالة (PSF) قد اندفع بشكل واضح نحو الداخل وهذا الاندفاع قد ازداد عند زيادة استطالة الفتحة البيضوية (a=4) (الفتحة الثالثة) وهنا تظهر فائدة استخدام الفتحة البيضوية المعاقة بالمقارنة مع الفتحة الدائرية المعاقة .
في الشكلين (4) و(5) تم تغيير نسبة الإعاقة الى (ε=0.5) و(ε=0.75) على التوالي وأظهرت النتائج (كما في الشكل 3) ان استطالة الفتحة البيضوية أدت إلى

حيث عوضنا عن العدد الموجي (k=2π/λ) ولاخذ بنظر الاعتبار ان دالة الزينغ تقاس بوحدات الطول الموجي ، وتبسيط المعادلة (17) ، ولكون دالة الجيب (sin) دالة فردية نحصل على :

$$=psf = G(z)$$

$$\frac{1}{\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \left| \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \cos(2\pi\omega(x,y) + zx) dx dy \right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{\varepsilon}{a}}^{+\frac{\varepsilon}{a}} \int_{-a\sqrt{1-\frac{a^2 y_1^2}{\varepsilon^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{a^2 y_1^2}{\varepsilon^2}}} \cos(2\pi\omega(x_1,y_1) + z_1 x_1) dx_1 dy_1 \right.$$

وعولجت المعادلة (18) بعد كتابتها بطريقة كاوS العددية ، وباستخدام لغة Q-Basic لحساب قيم (PSF) لكل قيمة من قيم (z) ورسمت منحنيات (PSF) المقابلة لقيم z .

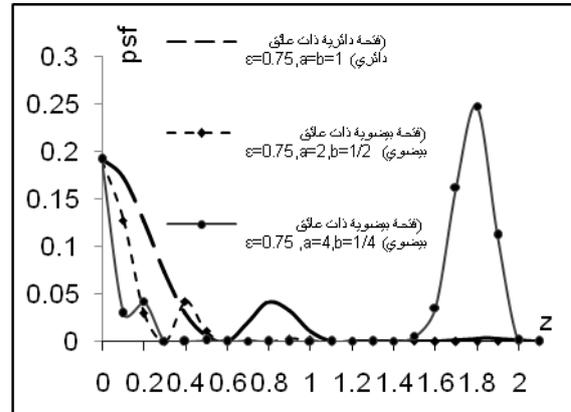
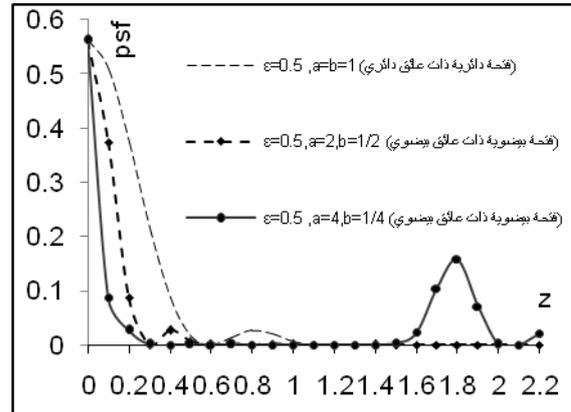
3- مناقشة النتائج

يبين الشكل (2) الذي يمثل العلاقة بين قيم دالة الانتشار النقطية (PSF) على طول المحور البصري (z) لنظام محدد بالحيود انه عندما كانت نسبة الإعاقة (ε=0.25,0.5,0.75) فان قيم دالة الانتشار النقطية (PSF) المقابلة لها كانت (PSF=1,0.897,0.500,0.100) على التوالي وهذا يتفق مع الدراسات السابقة [16,13] والتي اخذت نسب اعاقه مختلفة لفتحة دائرية معاقة .

اندفاع منحنى دالة الانتشار النقطية (PSF) إلى الداخل وهذا أدى إلى تحسن واضح في تركيز الطاقة ضمن مساحة صغيرة .

4- الاستنتاجات

- 1- ان زيادة نسب الإعاقة أدت إلى نقصان في قيم دالة الانتشار النقطية (PSF).
- 2- تغير شكل الفتحة الدائرية المعاقة إلى فتحة بيضوية معاقة أدى إلى تحسن واضح في قيم دالة الانتشار النقطية (PSF).
- 3- زيادة استطالة الفتحة البيضوية المعاقة أي زيادة طول المحور الكبير للفتحة البيضوية المعاقة أدى إلى تحسن أكبر في قيم دالة الانتشار النقطية (PSF).



الشكل (5) يمثل قيم (PSF) على طول المحور البصري Z لفتحات معاقة ($\epsilon=0.75$) ذات شكل دائري و بيضوي ولقيم مختلفة من استطالة الشكل البيضوي ($a=1,2,4$) لنظام محدد بالحيود

الشكل (4) يمثل قيم (PSF) على طول المحور البصري Z لفتحات معاقة ($\epsilon=0.5$) ذات شكل دائري و بيضوي ولقيم مختلفة من استطالة الشكل البيضوي ($a=1,2,4$) لنظام محدد بالحيود .

References

- [1] Gerbig V., Lohmann A.W. ,(1989) ,Is lens design legal , J.Applied Optics ,V.28,N.24,p.5198-5199
- [2] Jc He, S.Marcos , RH.Webb, SA.Burns ,(1998) , Optick ,V.109, N.2 , p.182
- [3] J.M. Woznicki ,(1988) , the three – dimensional point spread function and statistical image surface of the image-intensifier electron-optical system , Can.J.Phys.,V.66,N.10,p. 883-887
- [4] Vasudevan L. and Maria L. ,(1990), point spread function and modulation

transfer function of a photolens treated as a cascade linear system under the fresnel regime :application to atessar lens,SPIE, Optical Engineering, V.29, N.3,p.263-270 .

[5] R. Barakat. A. Houston ,(1965), Transfer function of an Annular Aperture in the presence of spherical Aberration , J. Opt. Soc . Am. ,V.55, N.5,P.538-539

[6] Thomas G.Kuper ,(1985) , SPIE , V. 560 , Diffraction Phenomena in Optical Engineering Applications , P.2

[7] CS.Grawford. I. Lehmann, Ac. Fabian, (1999), optic , V.110, N.10 , p476 .

[8] Ojeda J. , Tepichin E. , Pons A., (1988), Talbot interferometer with simultaneous dark and bright fields, J. Applied optics , V.27 ,N.24 , p.140,

[9] Donald R.Erschloe , James E.Harvey ,(1985) , Diffraction Phenomena in Optical Engineering Applications , SPIE , V .560 , P.114

[10] R.S.Longhurst ,(1973). Geometrical and physical optics , third Edition , P.254

[11]Welford W.T. ,(1960),Use of Annular apertures to increase focal depth, J.Opt.Soc.Am,V.50,N.8,P.749

[12] Rivolta C. ,(1988),Annular circular aperture :intensity maxima and minima on the optical axis , J.Applied optics, V.27 , N.5 ,p.929

[13] Mahajan V .N. ,(1983),Axial irradiance and optimum focusing of laser beams ,J. Applied optics, V.22 ,N.19 , p.3042

[14] I .Powell ,(1973),(1973),The computation of Aberration Diffraction Image for catadioptric System Optical Acta ,V.20, N.11 , p.879-900 .

[15] L. Novotny , B. Hecht, (2006), principles of Nano-optics (Cambridge)

[16] غادة صباح ال شعبان، أطروحة دكتوراه، الجامعة المستنصرية، حساب الاستضاءة الكلية في صورة جسم نقطي، (2001)