KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

عمليـــات Hull–White الكسريــــــة مع التطبيق

أ.د. مهند فائز كاظم
الباحثة حنين حسين التميمي
جامعة القادسية / كلية الإدارة والاقتصاد

DOI: https://doi.org/10.36322/jksc.178(B).21528

الملخص:
تناول هذا البحث، تقديم عملية Hull–White باستخدام الحركة البراونية الكسرية, إذ تتميز الحركة البراونية الكسرية بتمثيلها الافضل للبيانات التي تمثل سلسلة زمنية ذات اعتمادية طويلة الأمد, خصوصا البيانات المالية والاقتصادية. إنَّ عملية الحركة البراونية الكسرية تتضمن بصيغتها الرياضية على معلمة Hurst (H) التي تمثل معلمة الذاكرة الطويلة إذ يتم عن طريق قيمها تحديد فيما إذا كانت تسلك سلوك يتصف بانه ذو (Short–Term) , (Long–Term). يعتبر نموذج Hull–White امتداد لنموذج Vasicek وCIR, تم استخدام طريقة الإمكان الأعظم MLE في تقدير هذه النماذج, وبالتالي الحصول على أفضل نموذج لهذه البيانات بالاعتماد على تحليل بيانات حقيقية تمثل أسعار الاسهم في سوق الأوراق المالية في العراق حيث تم تحويل هذه البيانات إلى معدلات فائدة لتلاءم مع طبيعة النماذج الثلاثة المدروسة وأظهرت البيانات المدروسة دقة تمثيلها لعملية العودة المتوسطة, إضافة إلى ذلك تبين أنَ نموذج Hull–White هو النموذج الأفضل لتمثيل هذه البيانات باستخدام معيار AIC.

الكلمات المفتاحية: العملية العشوائية, المعادلات التفاضلية العشوائية,الحركة البراونية الكسرية, نموذج Hull-White .

Fractions with Hull-White Operations

Prof. Dr. Muhannad Fayez Kazim
Researcher: Hanin Hussein Al-Tamimi
University of Al-Qadisiyah / College of Administration and Economics

Abstract:
This research dealt with presenting the Hull-White process using fractional Brownian motion, as fractional Brownian motion is characterized by its better

representation of data that represents a time series with long-term reliability, especially financial and economic data. The process of fractional Brownian motion includes, in its mathematical form, the Hurst parameter (H), which represents the long memory parameter, as it is determined through its values whether it behaves characterized as (Short-Term), (Long-Term). The Hull-White model is considered As an extension of the Vasicek and CIR model, the MLE method was used to estimate these models, thus obtaining the best model for these data based on the analysis of real data representing stock prices in the stock market in Iraq, where this data was converted into interest rates to suit the nature of the three models. The studied data showed that they accurately represent the average return process. In addition, it was found that the Hull-White model is the best model to represent these data using the AIC standard.
Keywords: random process, stochastic differential equations, fractional Brownian motion, Hull-White model.

١. المقدمــــــــــــــــة:

في هذا البحث قمنا بدراسة نموذج Hull–White المساق بالحركة البراونية الكسرية. سوف نستخدم نهجاً تقريبيا لإيجاد حل لهذا النموذج الذي يظهر سلوكاً بعيد المدى لأسعار الفائدة. يعد هذا النموذج مفيدًا جدًا في ممارسة الأسواق المالية، فهو يوفر أيضًا سعر السندات ذات القسيمة الصفرية المقابلة لكل قيمة للمعدل r_t. لكن كل قيمة لـ r_t يمكن أن تؤثر على سلوكها في نطاق زمني معين. وفي المقابل, فإن أسعار السندات في وقت ما يمكن أن يكون لها بعض العواقب على سعرها في وقت لاحق. في هذا السياق, فإن نموذج Hull–White العادي غير مناسب لأن حله هو دائمًا عملية ماركوف التي لا تحتوي على ذاكرة.

الغرض من هذا البحث هو تقديم نموذج Hull–White الكسري لسعر الفائدة r_t بالحركة البراونية الكسرية, وهي عملية ذات ذاكرة طويلة $H \in (0, 1)$, إذ أصبحت الحركة البراونية الكسرية أداة مهمة جدًا في الاحتمالات والإحصائيات الحديثة, في هذا المبحث سنعرض بعض المفاهيم الاساسية للعمليات العشوائية والحركة البراونية الكسرية,أضافة الى ذلك مناقشة عملية العودة للمتوسط واشتقاق المعادلة

التفاضلية العشوائية, وإيجاد التوقع والتباين المشترك(التغاير). كذلك سعر الفائدة المتغير المساق بالحركة البراونية الكسرية باستخدام معلمة هيرست(Hurst Parameter), واستخدام طريقة الامكان الاعظم للتقدير .

أنَّ مشكلة البحث ركزت على استخدام الحركة البراونية الكسرية على انها مصدر العشوائية وعدم التأكد هذا ما دفع الباحث الى دراسة عملية الحركة البراونية الكسرية كونها تعتمد على معلمة Hurst التي تحدد قيمتها فيما إذا كانت العملية ذات سلوك يتصف بالذاكرة الطويلة أو القصيرة. لذلك اعتمد الباحث على دراسة نموذج Hull–White باعتباره أحد نماذج لعملية العودة للمتوسط (Mean–reverting) لتمثيل بيانات معدل الفائدة وبافتراض ان تقلبات معدل الفائدة تخضع لعملية الحركة البراونية الكسرية. ودراسة تطبيق ال نماذجVasicek وHull–White CIR لنمذجة بيانات معدل فائدة أسعار أسهم سوق الأوراق المالية في العراق. وتقدير معالم النماذج الثلاثة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم بافتراض قيم معينة لمعلمة الذاكرة الطويلة H.

سيتم عرض بعض المفاهيم عن العمليات العشوائية ومعادلاتها وأنواع Brownian Motion مع ذكر نماذج قصيرة الأجل وأفضل مثل على هذه الأنواع هوHull–White مع التطبيق على بيانات سوق الأوراق المالية في العراق.

٢. المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations (SDE:

هي مجال مهم في كل من النظرية الاحتمالية وتطبيقها، في السنوات الاخيرة تعد المعادلة التفاضلية أداة فعالة ومهمة وبسبب مرونتها التكيفية في تمثيل الظواهر على سبيل المثال في مجال علوم الحياة والفيزياء والعلوم الهندسية والاسواق والمال كون هذه الظاهرة تتصف بياناتها بالتقلبات غير المنتظمة عبر الزمن[1] .

وهي معادلة تفاضلية يكون فيها أحد حدودها أو أكثر على شكل ضوضاء بيضاء (White noise) أي (عملية عشوائية) وبالتالي اعتبار الحل لهذه المعادلة التفاضلية بمثابة عملية عشوائية, أنَّ SDE تأخذ الشكل الاتي اعتماداً على شروط عملية الحركة البراونية:[15] :

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t) \qquad t \geq 0 \qquad \ldots(1.1)$$

حيث أنَّ:

x_t : عملية عشوائية عند الزمن t.

μ: معلمة drift (متوسط العوائد).

σ : معلمة التقلب volatility وتمثل مقياس للانحرافات المعيارية لمتغير العملية العشوائية.

W_t : الحركة البراونية القياسية.

أنَّ المعادلة (1.1) يمكن أعادة كتابتها على شكل تكامل(Integral) كالآتي :

$$X(t+s) = X(t) + \int_t^{t+s} \mu(X(g),g)dg + \int_t^{t+s} \sigma\,(X(g),g)dw(g)\ldots(1.2)$$

$X(t)$ تمثل الحالة الحالية للعملية العشوائية وأن $X(t+1)$ تمثل الحالة المستقبلية للعملية العشوائية وتدعى هذه الخاصية خاصية ماركوف Markov property. أن الصيغة(2.1) تدعى بالتكامل العشوائي Stochastic Integral.

من المعادلات (١,١) و(١,٢) نستنتج أن المعادلة التفاضلية هي معادلة رياضية تضم الدوال $\sigma(.)$ و$\mu(.)$ مشتقات هذه الدوال تمثل معدل التغير rate of change وبهذا يمكننا القول أن المعادلات التفاضلية تقدم اساس رياضي لهيكلة العلاقة بين الدوال المتمثلة بـ (quantities) ومشتقاتها (derivatives).

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

تعريف ١ : الضوضاء البيضاء White Noise :

العملية العشوائية $(\varepsilon_t)_{t\epsilon T}$ هي عملية ضوضاء بيضاء [8]

١) $E(\varepsilon_t) = 0 \ , \quad \forall\, t \in R^+$

٢) $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty \ , \quad \forall\, t \in R^+$

٣) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \ , \quad \forall\, t \neq s$

وبهذا فأن عملية الضوضاء البيضاء تتكون من سلسلة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة بمتوسط صفر وتباين محدد.

تعريف٢: الترشيح Filtration:

لنفرض أن لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω,F,Ft,P) ولتكن T>0 ولنفرض ان $0 \le t \le T$ فأنه يوجد $\sigma{-}field$, $Ft \le t$, $Ft \subset F$ لكل $s \le t$ فأن $Fs \le Ft$ عندئذ فأن $F(t)_{\{0 \le t \le T\}}$ تدعى (Filtration), [9] .

تعريف ٣:Martingales :

تعتبر Martingales بمثابة عملية عشوائية تكون فيها سلسلة المشاهدات لمتغير معين وعند زمن معين فأنَّ توقع حدث القيمة التالية للمتغير في السلسلة يساوي المشاهدة الحالية وعند وجود معلومة بكل القيم المسبقة المشاهدة.

تلعب Martingales دوراً مركزيا في النظرية الحديثة للعمليات العشوائية وحساب التفاضل والتكامل العشوائي، ولنفرض أنَّ لدينا مجموعة الترشيح $\{F(t)\}_{0\le t\le T}$ والعملية العشوائية $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ ولنفرض $\{X(t)\}$متكيفة مع مجموعة الترشيح $\{F(t)\}$ عندئذ فأن: [4]

١) $\{X(t)\}$ تدعى عملية Martingales اذا كانت لكل t يوجد $\mu(t)$ قابل للتكامل اي ان $E|\mu(t)|<\infty$ لكل $0\le s<t\le T$.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

٢) وأنَّ $E[\mu(t)|F(s)]=\mu(s)$ إذ أنَّ $\mu(t)$ وهي عملية Martingales في $[0,\infty]$.

Itô: تعريف٤ : صيغــــــــــــــــــة

لنفرض أنَّ لدينا المعادلة التفاضلية العشوائية الاتية: [4]

$$dx(t)=A(t,Xt)dt+B(t,X(t))dW(t)$$

حيث أنَّ $A\in L1(0,T),B\in L2(0,T)$

وأنَّ $L1$ يمثل $-$norm $\|.\|^1$ وأنَّ $L2$ يمثل $-$norm $\|.\|^2$

وافرض أنَّ $U:R\times[0,T]\longrightarrow R$ هو متغير مستمر

وأنَّ المشتقات الجزئية $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ موجودة ومستمرة وكذلك لنفرض أنَّ

$y(t)=u(x(t),t))$ عندئذ فأن $y(t)$ يمتلك معادلة تفاضلية عشوائية

$$dy=\left(\frac{\partial u}{dt}dt+\frac{\partial u}{\partial x}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}B^2\right)dt+\frac{\partial u}{\partial x}BdW\ldots(1.3)$$

أنَّ الصيغة (1.3)تمثل صيغة Itô او قاعدة السلسلة Itô (Itô chain rule).

Lemma$-$: لنفرض أنَّ لدينا المعادلة التفاضلية الاتية:

$$dx(t)=B(t,x(t))dt+r(t,x(t))dw(t)\ldots(1.4)$$

ولنفرض أنَّ

$$B(t,x)=\mu x\ ,r(t,x)=\sigma x$$

وبهذا فأنَّ المعادلة(1.4)) سوف تصبح بالصيغة الاتية:

$$ds(t)=B(t,s(t))dt+r(t,s(t))dw(t)\ldots(1.5)$$

بشرط $X(t)=x$; $t\geq 0$ و $X\in R$

نبحث عن الحل X(T) الذي يحقق الشرط X(t) ويحقق المعادلة (1.5) ولإيجاد الحل نكامل ال SDE في (1.5) كالاتي:

$$\int_{t}^{T} dx(u) = \int_{t}^{T} B\big(u, x(u)\big)du + \int_{t}^{T} r(u, x(u))dW(u)$$

$$X(T) - X(t) = \int_{t}^{T} B\big(u, x(u)\big)du + \int_{t}^{T} r\big(u, x(u)\big)dw(u)$$

$$X(T) = \underbrace{x}_{\text{initial condition}} + \underbrace{\int_{t}^{T} B\big(u, x(u)\big)du}_{\substack{\text{ordinary integral} \\ \text{(lebesque integral)}}} + \underbrace{\int_{t}^{T} r\big(u, x(u)\big)dw(u)}_{\text{IîO integral}}$$

٣. الحركة البراونية الكسرية Fractional Brownian Motion (fBm) :

نلاحظ ان العديد من المشاكل التي تواجه الباحثين في العالم الحقيقي وخصوصاً في عالم المال والاقتصاد تفترض ان الحركة البراونية هي بمثابة مصدر للعشوائية (Randomness) واللايقين (Uncertaintly). لكن في واقع الحال الكثير من البيانات المالية أظهرت ادلة على فشل أتباع عامل اللايقين للحركة البراونية وذلك بسبب أن توزيع عوائد الاصول (asset return) لا يتبع توزيع Gaussلامتلاك هذا النوع من البيانات (Long tails) وتفلطح موجب, إضافة الى ذلك ان بيانات توزيع العوائد تظهر خاصية الاعتمادية طويلة الاجل (Long Memory) كل هذه الاسباب أدت الى اعتماد الباحثين على توزيعات احصائية معينة مثل(Laplace وStable) لوصف بيانات العوائد واعتماد الحركة البراونية الكسرية (Fractional Motion Brownian) واختصارا (fBm) لمتابعة الاعتمادية طويلة الامد للبيانات المالية . [12].

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

حيث قدم هذا النوع من (fBm) من قبل"Mandelbrot and Van Ness" في عـــام (١٩٦٨) , من خلال اضافة معلمة واحدة للحركة البراونية الاعتيادية وتسمى هذه المعلمة (Hurst) وتأخذ قيم بين ٠ و ١ . [12].

تعريف٥ :

على فرض أنَّ $H \in (٠,١)$ فأن الحركة البراونية الكسرية (fBm) $B^H = (B_t^H)_{t\geq o}$ هي عملية غاوس مستمرة بحيث أنَّ:[10]

١) $B_0^H = 0$

٢) $E(B_t^H) = 0 \ \forall \ t \in R^+$

٣) $E(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2} V_H (S^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}), \ \forall \ s,t \in R^+$

$$V_H = \frac{\Gamma(2-2H)COS(\pi H)}{\pi H(1-2H)}$$

ومن الجدير بالملاحظة انه عندما $H = \frac{1}{2}$ فأننا نحصل على الحركة البراونية القياسية (Standard), وسميت الحركة البراونية بالكسرية كونها تسمح لان تكون معلمة (Hurst) اي قيمة كسرية غير $\frac{1}{2}$.

٤. نماذج قصيرة الاجل Short Rate Interest Model :

نموذج سعر الفائدة قصير الاجل، في سياق مشتقات أسعار الفائدة، هو نموذج رياضي يصف تطور أسعار الفائدة من خلال وصف التطور المستقبلي لسعر الفائدة القصير، وعادة ما يتم كتابته r_t.

في التمويل, يمثل السعر القصير معدل الفائدة الفوري لفترة قصيرة جدًا, نظرًا لأن أسعار الفائدة قصيرة الأجل تختلف عن أسعار الأسهم , فهي تتطلب تطوير نماذج محددة لمراعاة بعض الخصائص مثل الإيجابية والقيود والعودة إلى التوازن, غالبًا ما يُطلق عليه "السعر النقدي" أو "معدل إعادة الشراء" أو "السعر القصير", ان أسعار الفائدة بطبيعة الحال تعتبر أساس التمويل , حيث يتم تسعير جميع الأصول المالية تقريبًا عليها, يعد نموذج السعر القصير مهمًا في التسعير وإدارة مخاطر مشتقات أسعار الفائدة , وهي أدوات مالية تُستمد قيمتها من مستوى أسعار الفائدة[14]

يمثل السعر القصير المعادلة التفاضلية العشوائية التالية:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r^B dW_t$$

حيث أنَّ:

r_t: هو معدل القصير الأجل في الوقت t.

$a(b - r_t)$: هي دالة الانجراف الحتمية التي تمثل السلوك المتوسط للمعدل القصير.

σ : هي دالة التقلب (Volatility).

dW_t : تمثل الحركة البراونية القياسية.

عندما $B = 0$ تعني ان العملية هي نموذج Vasicek. وان $B = ½$ تعني ان العملية هي نموذج CIR واذا كانت $B = 3/2$ تعني ان العملية هي Hull–White.

٥.نموذج سعر الفائدة The Hull–White Model :

تم تقديم هذا النموذج من قبل "John Hull and Alan White" عـــام (١٩٩٠)، وهو نموذج احادي العامل يعتمد على عامل عشوائي واحد (أي اسعار الفائدة قصيرة الاجل) [7]

يقوم نموذج Hull-White الذي تم تصميمه على أساس أسعار الفائدة المستقبلية وتطورها بتسعير المشتقات المالية كدالة لمنحنى العائد بأكمله وليس عند نقطة واحدة. ينتمي نموذج Hull-White إلى فئة نماذج المراجعة الحرة التي يمكن أن تكون من أهم مميزات هذا النموذج [5]. وفي نفس الوقت يعتبر امتداد لنموذج Vasicek (١٩٧٧) ونموذج CIR (١٩٨٥).

تعريف٦ :

في نموذج Hull -White يفترض أن السعر القصير يلبي المعادلة العشوائية التالية: [7]

$$dr_t = (b(t) - a(t)r_t)d_t + \sigma(\theta)dW_t \ldots (1.6)$$

حيث أنَّ:

r_t: المستوى الحالي للمعدل القصير الاجل.

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

عبر الزمن. (growth) وتمثل القيمة او متوسط النمو (drift)هي معلمة $b(t)$:

mean revertingهي معلمة التحكم : $a(t)$

هي معلمة التقلبات (الانحراف المعياري) للتغيرات الحاصلة بمعدل الفائدة. σ :

المستوى المتوسط الاجل الطويل للمعدل القصير الاجل. θ :

dW_t : الحركة البراونية القياسية .

اعتماداً على نموذج Hull-White لمعدل الفائدة r_t والمعرف بالصيغة (1.6) يمكن أعادة كتابة النموذج(1.6) بناء على عملية الحركة البراونية الكسرية بالصيغة الاتية :[11]

$$dr_t = (b(t) - a(t)r_t)d_t + \sigma(t)dB^H{}_t \ldots (1.7)$$

حيث أنَّ

$$B_t = \int_0^t (t-s)^{H-½} dW_S$$

وبهذا يمكن كتابة مسار الحل (Path–Solution) للنموذج (1.7) بافتراض انه يتبع عملية الذاكرة الطويلة وكالآتي :

$$r_t = r_o + \int_0^t [\, b(s) - a(s)r_s]d_s + \sigma(t)dB^H{}_t \ldots (1.8)$$

$$E\,[B_t^H \;\; B_s^H] = R_H(t,s) = \frac{1}{2}\,(\,|t|^{2H} + |s|^{2H} \, - |t-s|^{2H}\,), \quad \forall \;\; t,s \geq 0$$

حيث أنَّ B^H هي الحركة البراونية الكسرية مع H= 0.5 (t,s) ∈R و

$$B^H(t) = \int_0^t R_H\,(t,s)dw(s),$$

إذ تمثل Hمعلمة Hurst وهي مقياس للذاكرة طويلة الأجل للسلسلة الزمنية إذ عادة ما يرتبط مفهوم معلمة H مع مفهوم الارتباطات الذاتية للسلسلة الزمنية. وبذلك يمكن اعادة كتابة نموذج Hull -White

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

المشار اليه في المعادلة (1.6)، وبالاعتماد على مفهوم العملية البراونية الكسرية بعد افتراض الصيغة العامة لعملية العودة للمتوسط.

٦. تقدير معالم عملية العودة للمتوسط Estimating the parameters of the return to the mean process:

في هذا المبحث سيتم تقدير معالم العملية (Hull -White)، باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وكما موضح بالمعادلات الآتية:

بافتراض أنَّ لدينا النموذج المشار اليه في المعادلة (1.6) فأن مقدرات الإمكان الأعظم لهذا النموذج يمكن ايجادها بافتراض أنَّ معدل سعر الفائدة r_t يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين كالآتي :

$$m(t) = r_o e^{-k(t-s)} + r_{t_{(c,t)}} - r_{o_{(c,s)}} e^{-k(t-s)} + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-k(t-s)} + e^{-2k(t-c)} - e^{-k(t-c)} \dots (1.9)$$

$$Var(t) = \frac{\sigma^2}{2k}\,(1 - e^{-2kt}) \quad ,c \le s < t$$

وبالتالي فإنَّ دالة الإمكان الأعظم اللوغاريتمية معطاة بالصيغة الاتية:

$$log\ L(k,\theta,\sigma^2) = -\frac{n}{2} log(\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}) - \frac{n}{2} log 2\pi - \frac{k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})} \sum_{i=1}^{n} [r_t - (r_o e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt})]$$

عندئذ فإنَّ مقدرات المعالم k,θ,σ^2 هي كالآتي:

$$\hat{k} = -\frac{1}{dt}\ log\left(\frac{n \sum_{i=1}^{n} r_o r_{oi}\ \sum_{i=1}^{n} r_{oi}}{n \sum_{i=1}^{n} r^2{}_{oi} - (\sum_{i=1}^{n} r_{oi}\,)^2}\right) \dots (1.10)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n(1 - e^{-\hat{k}t})}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ti} - e^{-\hat{k}t} \sum_{i=1}^{n} r_{oi}\,\right) \dots (1.11)$$

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{k}}{n(1-e^{-\hat{k}t})}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ti}-r_{oi}-e^{-\hat{k}t}-\theta(1-e^{-\hat{k}t})\right)^2 \dots (1.12)$$

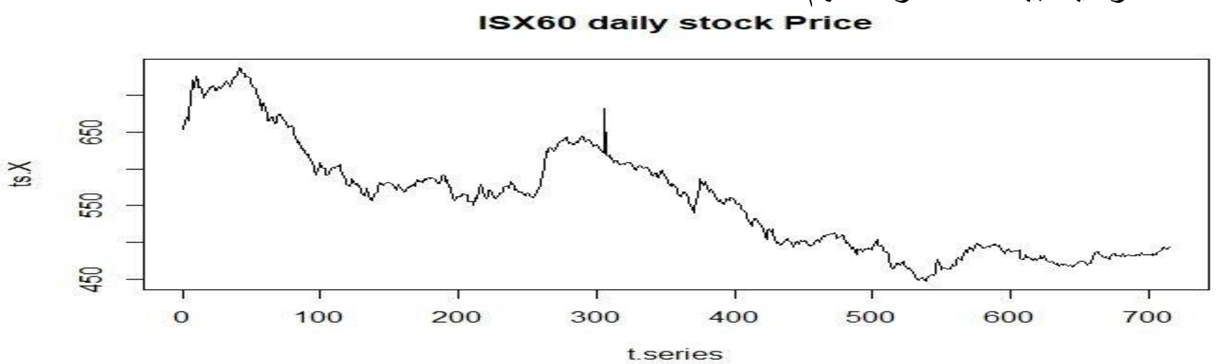
ونظرا لصعوبة حل النموذج ولعدم الحصول على حل تحليلي فأننا نلجأ الى الطرق العددية لإيجاد مقدرات (k, θ, σ^2) وباستخدام برنامج لغة R.

٧. تحليل البيانات الحقيقية Real data analysis:

في المبحث السابق تطرقنا إلى تقدير معالم النماذج (Vasicek) و(CIR) و (Hull–White) , باستخدام طريقة الإمكان الأعظم. في هذا المبحث سينصب اهتمامنا على تطبيق طريقة الإمكان الأعظم في تقدير النماذج أعلاه باستخدام البيانات الحقيقية, وبالتالي الحصول على أفضل نموذج لهذه البيانات.

إنَّ البيانات المستخدمة في هذا المبحث تمثل اسعار الاسهم في سوق الأوراق المالية في العراق والمشار أليها بالاختصار (ISX60) وللفترة بين (٢٠١٧/١/١ و ٢٠١٩\١\١) ولـ (٧١٦) مشاهدة وكما أسلفنا سابقا إنَّه سيتم تطبيق النماذج(Vasicek) و(CIR) و(Hull -White) بافتراض إنَّ التقلبات تتبع عملية الحركة البراونية الكسرية بالمعلمة H, إذ تظهر هذه النماذج قدرتها على تمثيل خاصية العودة المتوسطة. وما يهمنا هنا هو تقدير معالم هذه النماذج لمعدل الفائدة (r_t).

إذ إنَّ p_t يمثل سعر السهم بالزمن t باستخدام لغة R في ايجاد نتائج هذا التحليل والشكل أدناه يوضح السلسلة الزمنية لبيانات اسعار الاسهم.



KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

الشكـــــــــــــل رقم (1-1) يمثل أسعار الأسهم اليومية لسوق لأوراق المالية في العراق للفترة بين (٢٠١٧/١/١ و ٢٠١٩\١\١)

نلاحظ من الشكل أعلاه وجود تقلبات في بيانات السلسة وإنُّها تتجه للتناقص بمرور الزمن. إضافة إلى ذلك قمنا بتلخيص البيانات المذكورة في الجدول الآتي:

جدول رقم (١-١) خلاصة بيانات أسعار الأسهم في سوق لأوراق المالية في العراق (ISX60)

Min	1^{st} Qu	Median	Mean	3^{rd} Qu
448.6	490.0	562.0	556.7	600.9

من الجدول رقم (١-١) الذي يوضح خلاصة بيانات اسعار الاسهم لعينة الدراسة نجد إنَّ قيمة الوسيط (٥٦٢,٠) هي الأعلى قيمة من (Max= 736.2) مما يعني ر هناك التواءً موجباً وهذا أيضاً واضح من تقارب الربيع الأول (Q_1= 490) للحد الأدنى (Min= ٤٤٨,٦) وبالنتيجة نجد إنَّ توزيع البيانات غير متماثل و إنَّ العملية العشوائية التي تولدت منها البيانات هي عملية عشوائية لا تتبع فيها التقلبات التوزيع الطبيعي, أي إنَّ التقلبات لا تتبع الحركة البراونية الاعتيادية و إنَّما تمثل الحركة البراونية الكسرية, وبالتالي يمكن اعتبار بيانات السلسلة الزمنية لأسعار الاسهم بانها بيانات ذات اعتمادية طويلة الأجل (تتصف بالذاكرة الطويلة Long–Memory)

من المعروف عند تحليل السلاسل الزمنية لبيانات عالم المال (Finance world) فإنَّه يفضل افتراض دراسة معدلات الفائدة او العوائد بدلا من بيانات السلسلة الزمنية الاصلية , لأن دراسة بيانات معدل الفائدة أو العوائد تعطي معلومات أوفر من البيانات , توفر خلاصة يمكن لمتخذ القرار من الخوض في الاستثمارات, اضافة الى ذلك بيانات معدل الفائدة أو العائد تتمتع بتفسيرات وخصائص إحصائية أكثر فائدة للباحثين والعاملين في مجال الاستثمارات. إذ قام الباحث بتحويل البيانات التي تمثل أسعار الأسهم إلى معدل الفائدة باستخدام التحويل الآتي:

$$r_t = ln\frac{p_t}{p_{t-1}}$$

٨.اختبار خاصية العودة المتوسطة Testing the mean property of return :

في هذا المبحث سيتم اختبار توفر خاصية العودة المتوسطة (Mean–reverting) للبيانات المدروسة باستخدام اختبار (Augment Dickey Fuller) أو اختبار (ADF) وحسب الفرضية الآتية:

$$H_O: The\ process\ is\ mean\ reverting$$

$v.s$

$$H_1: The\ process\ is\ \ not\ mean\ reverting$$

وتحت مستوى معنوية (٥٪) وباستخدام برمجة لغة R حصلنا على النتائج الآتية:

جدول رقم (٢-١) نتائـــــــــــج اختبـــــــــــــــار (ADF)

ADF–S	P–Value	Decision
1.1451	0.001711	Fails to reject H_O

ومن نتائج الجدول رقم (٢-١) يمكن القول ا إنَّ بيانات معدل الفائدة يمكن معاملتها على إنَّها بيانات تتبع عملية العودة المتوسطة (سلسلة زمنية مستقرة), وهذا يدعم شروعنا بالعمل بنماذج (Vasicek) و(CIR) و(Hull -White), لتمثيل بيانات معدل الفائدة لأسعار الأسهم.

٩.اختبار حسن المطابقة Goodness of fit test :

في هذا المبحث سيتم اختبار فيما إذا كانت البيانات التي تمثل أسعار الأسهم قيد الدراسة تتبع التوزيع الطبيعي ام لا. إذ سيتم الاعتماد على اختبار(Kolmogorov–Smirnov) (k–s) لاختبار حسن مطابقة البيانات وفق الفرضية الاتية:

$$H_O: The\ data\ follow\ normal\ distribution$$

$v.s$

$$H_1: The\ data\ do\ not\ \ follow\ normal\ distribution$$

حيث إنَّ إحصائه الاختبار k–s هي:

$$D_n = \sup_x max\,(F^{(n)}(x) - x, x - F^{(n)}(x) - {}^{1}\!/_{n})$$

علما إنَّه سيتم استخدام إحصائه الاختبار المعدلة

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

$$K_n = \sqrt{n} D_n$$

والتي تمتلك دالة توزيع مقارب عندما $n \to \infty$, و إنَّ

$$F(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} exp(-(2k-1)^2 \frac{\pi^2}{(8x^2)})$$

وإنَّ

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x)}(x_i)$$

وباستخدام لغة البرمجة R ظهرت لدينا النتائج الآتية:

جدول رقم (٣-١) نتائـــــــــج اختبـــــــــار(K-S)

D_n	n	K_n	$F(K_n)$	P-value
.17082٠	716	4.5735	0.99847	0.00052

ومن الجدول رقم (٣-١) يتبين لنا رفض فرضية العدم مما يعني إنَّ البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي وهذا ما يتوافق مع الأساس النظري لعملية الحركة البراونية الكسرية التي تعمل للتغلب على مشكلة عدم اتباع السلسلة الزمنية للظاهرة المدروسة للتوزيع الطبيعي كون إنَّ السلسلة تعاني من خاصية الذاكرة الطويلة (Long-Memory).

١٠.تقدير معالم النماذج Estimating model parameters:

في هذا المبحث وبعد التأكد من إنَّ السلسلة الزمنية تتبع عملية العودة المتوسطة مما يمكننا من استخدام النماذج المدروسة (Vasicek) و(CIR) و(Hull -White), وكذلك بعد التأكد من إنَّ هناك مبرراً كافياً لاستخدام هذه النماذج تحت فرض إنَّ التقلبات تتبع عملية الحركة البراونية الكسرية وهذا ما اثبته اختبار K-S. فإنَّه يمكننا الان دراسة تأثير معالم هذه النماذج في تمثيلها للظاهرة المدروسة على بيانات معدل

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

الفائدة (r_t) عن طريق استخدام لغة البرمجة R يوضح الجدول في أدناه نتائج تقدير المعالم للنماذج المدروسة وفق طريقة MLE, وبافتراض إنَّ ($H = {}^{1}/_{2}$)

جدول رقم (٤-١) تقدير معالم النماذج (Vasicek) و(CIR) و(Hull -White) مع قيم الخطأ المعياري.

Parameter	Models		
	Vasicek	CIR	Hull -White
$\hat{K}$	0.112	0.131	–
$\hat{\theta}$	0.2656	0.2733	–
$\hat{\sigma}$	0.0736	0.1333	0.1433
$\hat{b}$	–	–	0.5737
$\hat{a}$	–	–	0.3781

وبافتراض إنَّ نموذج Vasicek بمثابة نموذج رياضي يستخدم في مجال البيانات الاقتصادية والمالية لتقدير سلوك مسار الحل الممكن للتغيرات الحاصلة في معدل الفائدة المستقبلي, إذ نجد إنَّ قيمة $\hat{K} = (0.112$) وتمثل معلمة سرعة عودة مسار معدل الفائدة إلى قيمته المتوسطة أي إنّة عند كل يوم فإنَّ معدل الفائدة لأسعار الأسهم يعود إلى حالة التوازن(المتوسط) تقريباً بمقدار (١٪) من التقلبات (الانحرافات)الحاصلة في السلسلة. و إنَّ قيمة معلمة التوازن ($\hat{\theta} = 0.2656$) وتمثل قيمة توازن سلسلة معدل الفائدة لأسعار الاسهم على المدى البعيد بحوالي (٣٪), واخيراً التقلبات على المدى البعيد كانت بقيمة ($\hat{\sigma} = 0.073$) وهو رقم منطقي معقول فيما يخص التنبؤ الجديد للسلسلة الزمنية. وتحت نفس الأسلوب بالتفسير يمكن تفسير نتائج نموذج (CIR) ونموذج (Hull -White).

من أجل المقارنة بين أداء أو تمثيل النماذج الثلاثة لبيانات عينة الدراسة فإنُّه سيتم استخدام معيار (AIC Akaike–AIC) للمقارنة بين هذه النماذج كونها تختلف بعدد المعالم المقدرة, إذ يستخدم هذا المعيار لاختيار النموذج الافضل. والجدول الآتي يوضح نتائج معيارAIC .

جدول رقم (٥ - ١) نتائـــــج اختبـــــــــــار معيـــــــــــار (AIC)

Model	AIC	Decision
Vasicek	.63٣	-
CIR	3.42	-
White-Hull	2.06	Best

ويتضح من الجدول أعلاه توفق نموذج (Hull -White) كون إنَّه حصل على أقل قيمة لمعيار AIC مما يدل على قدرة هذا النموذج وأفضليته على تمثيل بيانات الدراسة, كون معالم هذا النموذج هي دوال بالزمن t.

الاستنتاجات:

يعتبر نموذج (Hull–White) احد اهم النماذج الرياضية المستخدمة في نمذجة معدلات الفائدة. وان الحركة البراونية الكسرية تعالج مشكلة الاعتمادية الطويلة الامد في بيانات معدلات الفائدة. تم تحويل البيانات الحقيقة التي تمثل أسعار الأسهم في سوق الأوراق المالية في العراق إلى معدلات الفائدة للحصول على معلومات أوفر. إذ تبين إنَّ معدلات الفائدة لأسعار الأسهم بأنها تمثل عملية عودة متوسطة باستخدام اختبار (ADF). وبالتالي إمكانية تمثيل النماذج الثلاثة المدروسة لهذه البيانات. كذلك تبين البيانات عن طريق تحليل البيانات الحقيقة وباستخدام معيار (AIC) إنَّ أفضل نموذج يمثل بيانات معدلات الفائدة هو نموذج Hull–White كونه يعتمد على الزمن في كل معلمة من معالم هذا النموذج مما يعطي مرونة أكثر للتعامل مع التغيرات الفورية بمرور الزمن.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ
OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

REFERENCES:

1. Al -Saadony, M.,(2016),"A Simulation Study on Stochastic Differential Equation Driven by Lévy processes", Al kut Journal for Economic and administrative Sciencess, No.23. (1-13 p.p).

2. Evans L. C., ,(2006)"An Introduction to Stochastic Differential Equations", Version 12, Lecture Notes, Short Course at SIAM Meeting, July, 2006.

3. Fard,H.,S,Dastranj,E.,Ataabadi,A.,A.,(2022), "Analytical and Numerical Solutions for the Pricing of a Combination of Two Financial Derivatives in a Market Under Hull-White Model , " Adv. Math. Fin. App., 2022, 7(4), P. 1013-1023.

4. Gong, Z.,(2021) ,"The Mean-Reverting 4/2 Stochastic Volatility Model: Properties And Financial Applications", The University of Western Ontario A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the Doctor of Philosophy degree in Statistics and Actuarial Sciences.

5. Hauser,M., (٢٠١٦) ,"The Derivative of Brownian Motion is White GaussianNoise"http://mbhauser.com/informal-notes/white-gaussian-noise.pdf.

6. Klebaner F. C.,(2005) ,"Introduction to Stochastic Calculus with Application", Imperial College Press, 2005..

7. Mandelbrot, B., B. and Van Ness, J.,W., (1968) ,"Fractional Brownian motions, fractional noises and applications",Society for Industrial and Applied Mathematics, 10(4), pp. 422–437.

8. Rattikan,S.,(2004)," A Fractional Hull-White Model," Vietnam Journal of Mathematics 32:4 (2004) 413–418.

9. S. Rostek, R. Schöbel,(2013)," A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling", Economic Modelling, Volume 30, January 2013, Pages 30-35.

ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq

10. Trading,D.,(2023),"Short-Rate Model",http://www.daytrading.com/short-rate-model.

11. Zong , Xiaofeng , Fuke Wu, chengming Huang .,(٢٠١٥), " Theta Schemes for SDDE with non –globally Lipschitz Continuous coefficients". a Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing,2014.

KUFA STUDIES CENTER JOURNAL
UNIVERSITY OF KUFA
مجلة مركز دراسات الكوفة - جامعة الكوفة
KSCJ
OPEN ACCESS
ISSN (P) : 1993-7016
ISSN (E) : 2708-728X
www.journal.uokufa.edu.iq